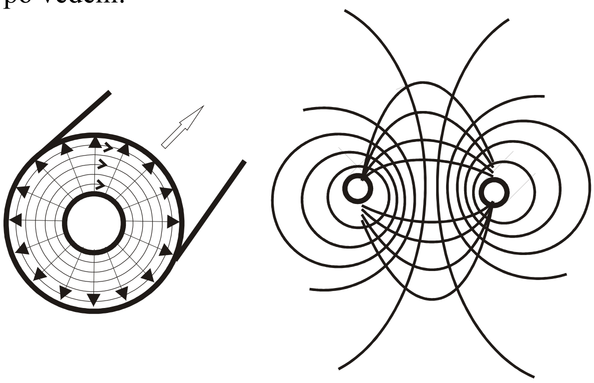
V - VED Vedení elektromagnetických vln

VED-a Základní vztahy, fázory veličin

Pro ekonomický transport energie mezi zdrojem a spotřebičem není obvykle možné předávat energii přenosem elektromagnetickými vlnami v neohraničeném prostoru. Elektromagnetické vlny, které energii přenášejí, musí být vedeny v určitém konkrétním směru a to buď podél povrchu vodičů, nebo musí být udržovány pomocí vodivých nebo dielektrických stěn uvnitř omezeného prostoru, kde se šíří cestou pomyslných mnohačetných odrazů.
Případ vedení vlny podél povrchu vodičů odpovídá běžným druhům používaných střídavých vedení v elektrotechnice, ať už se jedná o dvouvodičové, nebo koaxiálního vedení. Elektromagnetická vlna přenášející energii je v tomto případě vedena paralelně s osou vodiče.
Ve druhém případě, kdy vlnu udržujeme v příčně omezeném prostoru, hovoříme o takzvaných vlnovodech. Vlnovody mohou být nejrůznějších druhů, podle materiálu například kovové nebo dielektrické, podle tvaru pravoúhlé nebo kruhové.
V tomto textu se budeme zabývat pouze prvním případem vedení, kdy vzniká elektromagnetická vlna, která se šíří podél vedení a má tvar elektromagnetického pole podobný jako na obrázku. Siločáry elektrického a magnetického pole jsou navzájem kolmé linie, které jsou navíc kolmé na směr šíření vlny po vedení.

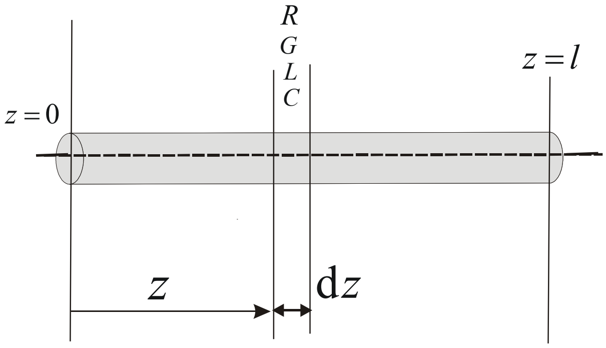


(Obr. VED-1) Tvar siločar elektromagnetického pole podél dvouvodičového a koaxiálního vedení

Ve smyslu zavedené terminologie používané v teorii vedení vln mluvíme v tomto případě o vlně TEM na vedení, což znamená:

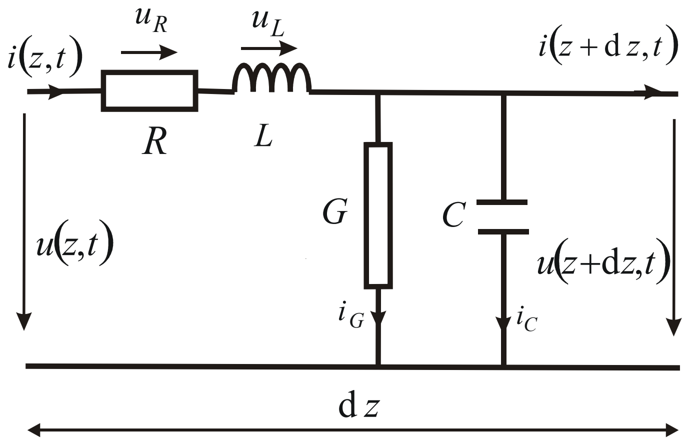
T … transverzální, kolmé
E … veličiny elektrického pole jsou kolmé na směr šíření
M … veličiny magnetického pole jsou kolmé na směr šíření

U elektromagnetické vlny, která se vytvoří na vedení, by se na první pohled zdálo, že je to klasifikace samoúčelná, že se jedná vždy o složky pole kolmé ke směru šíření. Na vlnovodech se však šíří elektromagnetické vlny, které mají obraz pole typu TE (intenzita elektrického pole pouze ve směru kolmém na směr šíření, intenzita magnetického pole má i složku ve směru šíření vlny. Na vlnovodu mohou vniknout a být vedený i vlny, které jsou typu TM.
Na koaxiálním vedení (koaxiálním kabelu) mohou kromě vln TEM také vzniknout vlny typu TE a TM, nejsou však předmětem našeho zkoumání.



(Obr. VED-2) Element délky na vedení

U homogenního vedení předpokládáme, že bude mít v každém místě stejné vlastnosti, které jsou jednoznačně popsány parametry na jednotku délky (**R** - podélný činný odpor, **G** - příčná vodivost, **L** - podélná indukčnost, **C** - příčná kapacita). Když si na takovém vedení o délce ***l*** vytkneme ve vzdálenosti **z** element o délce **d*z***, je možno nakreslit pro tento element náhradní schéma jako na obrázku (Obr. VED-3).



(Obr. VED-3) Náhradní schéma pro element homogenního vedení

Element vedení o délce **d*z*** má tyto parametry

činný odpor	$R \cdot \mathrm{d}\,z$
indukčnost	$L \cdot \mathrm{d}\,z$
kapacita	$C \cdot \mathrm{d}\,z$
příčná vodivost	$G \cdot \mathrm{d}\,z$

Element vedení lze popsat klasickými obvodovými rovnicemi

Napěťové rovnice pro element vedení o délce **d*z***

$$u(z,t) - u(z+\mathrm{d}\,z,t) - u_R - u_L = 0$$

napětí na indukčnosti

$$u_L = L \cdot \mathrm{d}\,z \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

úbytek napětí na odporu

$$u_R = R \cdot \mathrm{d}\,z \cdot i(z,t)$$

Vztah mezi napětím na začátku a na konci elementu

$$u(z+\mathrm{d}\,z,t) = u(z,t) + \frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\mathrm{d}\,z$$

Proudové rovnice pro element vedení o délce **d*z***

$$i(z,t) - i(z+\mathrm{d}\,z,t) - i_G - i_C = 0$$

proud procházející náhradní kapacitou

$$i_C = C \cdot \mathrm{d}\,z \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}$$

proud procházející svodovou vodivostí

$$i_G = G \cdot \mathrm{d}\,z \cdot u(z,t)$$

Vztah mezi proudem na začátku a na konci elementu

$$i(z+\mathrm{d}\,z,t) = i(z,t) + \frac{\partial i(z,t)}{\partial z}\mathrm{d}\,z$$

Napěťové a proudové rovnice po úpravě a dosazení

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} + R \cdot i(z,t) + L \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} + G \cdot u(z,t) + C \cdot \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = 0$$

Pro harmonické průběhy je možné rovnice upravit zavedením fázorů

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{U}(z)}{\mathrm{d}\,z} + (R + \mathrm{j}\omega \cdot L) \cdot \mathbf{I}(z) = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{I}(z)}{\mathrm{d}\,z} + (G + \mathrm{j}\omega \cdot C) \cdot \mathbf{U}(z) = 0 \qquad \text{(VED*1)}$$

Ze vzniklé soustavy rovnic je možné eliminovat jednu z veličin. Eliminace se snadno provede opětovným derivováním jedné rovnice a dosazením do druhé rovnice. Vyloučíme-li proud, dostaneme diferenciální rovnici pro fázor napětí, která je zcela stejná jako vlnová rovnice pro rovinnou harmonickou elektromagnetickou vlnu

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{U^2}(z)}{\mathrm{d}\,z^2} - (R + \mathrm{j}\omega \cdot L) \cdot (G + \mathrm{j}\omega \cdot C)\mathbf{U}(z) = 0 \qquad \text{(VED*2)}$$

{Př. VED/1} Určení fázoru napětí řešením rovnice pro vlnu na vedení

V jakém tvaru lze nalézt řešení vlnové rovnice na vedení pro fázor napětí?

Vlnovou rovnici pro harmonické průběhy

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{U}^2(z)}{\mathrm{d}\,z^2} - (R + \mathrm{j}\omega \cdot L)\cdot(G + \mathrm{j}\omega \cdot C)\mathbf{U}(z) = 0$$

je možno upravit zavedením konstanty γ, která se nazývá konstanta šíření na vedení, do tvaru

$$\boldsymbol{\gamma}^2 = (R + \mathrm{j}\omega \cdot L)\cdot(G + \mathrm{j}\omega \cdot C)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{U}^2(z)}{\mathrm{d}\,z^2} - \boldsymbol{\gamma}^2 \cdot \mathbf{U}(z) = 0$$

Konstanta šíření má opět reálnou a imaginární složku, ale je definovaná s ohledem na používané konvence poněkud odlišně, než konstanta šíření u rovinné harmonické elektromagnetické vlny (viz {Př. VED/3} - Srovnání veličin pro rovinnou harmonickou vlnu a vlnu na vedení).

$$\boldsymbol{\gamma} = \alpha + \mathrm{j}\beta = \sqrt{(R + \mathrm{j}\omega \cdot L)\cdot(G + \mathrm{j}\omega \cdot C)} \qquad \text{(VED*3)}$$

Činitel α a β má však stejný význam. α je měrný útlum a β je fázová konstanta.

Řešení rovnice je možné najít v podobě

$$\mathbf{U}(z) = \mathbf{C_1}\cdot e^{\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot z} + \mathbf{C_2}\cdot e^{\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot z}$$

Po dosazení za koeficienty λ platí obecné řešení

$$\mathbf{U}(z) = \mathbf{C_1}\cdot e^{-\boldsymbol{\gamma}\cdot z} + \mathbf{C_2}\cdot e^{+\boldsymbol{\gamma}\cdot z} = \underbrace{\mathbf{C_1}\cdot e^{-(\alpha+\mathrm{j}\beta)\cdot z}}_{+z} + \underbrace{\mathbf{C_2}\cdot e^{+(\alpha+\mathrm{j}\beta)\cdot z}}_{-z} \qquad \text{(VED*4)}$$

Z fyzikálního významu jednotlivých členů je vidět, že první část představuje vlnu v kladném směru osy z (s rostoucím z se tlumí amplituda a průběh se fázově zpožďuje), druhý člen představuje vlnu v záporném směru osy z.

Konstanty $\mathbf{C_1},\mathbf{C_2}$ je nutno určit z okrajových podmínek - ze známé hodnoty napětí a proudu v jednom místě na vedení.

{Př. VED/2} Určení fázoru proudu pomocí fázoru napětí, charakteristická impedance

Jak vypadá obecná rovnice pro fázor proudu elektromagnetické vlny na homogenním vedení?

Fázor proudu lze určit výpočtem z jedné rovnice soustavy (VED*1) a dosazením za fázor napětí z (VED*4)

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{U}(z)}{\mathrm{d}\,z} + (R + \mathrm{j}\omega \cdot L)\cdot \mathbf{I}(z) = 0$$

dostáváme velikost fázoru proudu v závislosti na fázoru napětí

$$\mathbf{I}(z) = -\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{U}(z)}{\mathrm{d}\,z}\cdot\frac{1}{(R + \mathrm{j}\omega \cdot L)}$$

Po provedení naznačené derivace pro fázor napětí ze vztahu (VED*4) vyplyne pro fázor proudu

$$\mathbf{I}(z) = \frac{\boldsymbol{\gamma}\cdot\left[\mathbf{C_1}\cdot e^{-\boldsymbol{\gamma}\cdot z} - \mathbf{C_2}\cdot e^{+\boldsymbol{\gamma}\cdot z}\right]}{(R + \mathrm{j}\omega \cdot L)} = \frac{\left[\mathbf{C_1}\cdot e^{-\boldsymbol{\gamma}\cdot z} - \mathbf{C_2}\cdot e^{+\boldsymbol{\gamma}\cdot z}\right]}{\sqrt{\dfrac{R + \mathrm{j}\omega \cdot L}{G + \mathrm{j}\omega \cdot C}}} = \qquad \text{(VED*5)}$$

$$= \frac{\mathbf{C_1}\cdot e^{-\boldsymbol{\gamma}\cdot z} - \mathbf{C_2}\cdot e^{+\boldsymbol{\gamma}\cdot z}}{\mathbf{Z_0}} = I_+(z) + I_-(z)$$

Fázor proudu má také dvě části. První odpovídá vlně postupující v záporném směru osy z, druhá vlně postupující v kladném směru osy z. Ve vztahu se objevila nová komplexní veličina, která udává podíl fázoru napětí a proudu přímé respektive odražené vlny

$$\mathbf{Z_0} = \frac{\mathbf{U}_+(z)}{\mathbf{I}_+(z)} = -\frac{\mathbf{U}_-(z)}{\mathbf{I}_-(z)}$$

Tato veličina se nazývá **charakteristická impedance na vedení** a pomocí parametrů vedení je možné ji určit takto

$$\mathbf{Z_0} = \sqrt{\frac{R + \mathrm{j}\omega \cdot L}{G + \mathrm{j}\omega \cdot C}}$$

{Př. VED/3} Srovnání veličin pro rovinnou harmonickou vlnu a vlnu na vedení

Jak si navzájem odpovídají vztahy popisující rovinnou harmonickou elektromagnetickou vlnu a vlnu na homogenním dvouvodičovém vedení ?

Vlna na vedení	**Rovinná harmonická elektromagnetická vlna**
Základní vlnová rovnice pro harmonické průběhy ve fázorovém tvaru	
$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{U}^{\mathbf{2}}(z)}{\mathrm{d}\,z^2}-(R+\mathrm{j}\omega\cdot L)\cdot(G+\mathrm{j}\omega\cdot C)\mathbf{U}(z)=0$	$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{E_x}^{\mathbf{2}}(z)}{\mathrm{d}\,z^2}-\mathrm{j}\omega\mu(\mathrm{j}\omega\varepsilon+\sigma)\mathbf{E}_x(z)=0$
zavedení konstanty šíření po vedení	zavedení konstanty šíření
$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{U}^{\mathbf{2}}(z)}{\mathrm{d}\,z^2}-\boldsymbol{\gamma}^2\cdot\mathbf{U}(z)=0$	$\frac{\mathrm{d}\,E_x^{\mathbf{2}}(z)}{\mathrm{d}\,z^2}+\mathbf{k}^2\cdot\mathbf{E}_x(z)=0$
$\boldsymbol{\gamma}^2=(R+\mathrm{j}\omega\cdot L)\cdot(G+\mathrm{j}\omega\cdot C)$	$\mathbf{k}^2=-\mathrm{j}\omega\mu(\mathrm{j}\omega\varepsilon+\sigma)$
$\boldsymbol{\gamma}=\alpha+\mathrm{j}\beta=\sqrt{(R+\mathrm{j}\omega\cdot L)\cdot(G+\mathrm{j}\omega\cdot C)}$	$\mathbf{k}=\beta-\mathrm{j}\alpha=\sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu(\mathrm{j}\omega\varepsilon+\sigma)}$
Z dalšího textu vyplyne, že i na vedení bude mít konstanta α význam měrného útlumu a konstanta β bude fázová konstanta.	
Charakteristická rovnice	
$\boldsymbol{\lambda}^2-\boldsymbol{\gamma}^2=0$	$\boldsymbol{\lambda}^2+\mathbf{k}^2=0$
Kořeny charakteristické rovnice	
$\boldsymbol{\lambda}_{1,2}=\pm\boldsymbol{\gamma}$	$\boldsymbol{\lambda}_{1,2}=\pm\,\mathrm{j}\mathbf{k}$
Obecné řešení diferenciální rovnice	
$\mathbf{U}(z)=\mathbf{C_1}\cdot e^{\boldsymbol{\lambda}_1\cdot z}+\mathbf{C_2}\cdot e^{\boldsymbol{\lambda}_2\cdot z}$	$\mathbf{E_x}(z)=\mathbf{C_1}\cdot e^{\boldsymbol{\lambda}_1\cdot z}+\mathbf{C_2}\cdot e^{\boldsymbol{\lambda}_2\cdot z}$
$\mathbf{U}(z)=\mathbf{C_1}\cdot e^{-\boldsymbol{\gamma}\cdot z}+\mathbf{C_2}\cdot e^{+\boldsymbol{\gamma}\cdot z}=$	$\mathbf{E}_x(z)=\mathbf{C_1}\cdot e^{-\mathrm{j}\mathbf{k}\cdot z}+\mathbf{C_2}\cdot e^{-\mathrm{j}\mathbf{k}\cdot z}=$
$=\underbrace{\mathbf{C_1}\cdot e^{-(\alpha+\mathrm{j}\beta)\cdot z}}_{+z}+\underbrace{\mathbf{C_2}\cdot e^{+(\alpha+\mathrm{j}\beta)\cdot z}}_{-z}$	$=\underbrace{\mathbf{C_1}\cdot e^{-\mathrm{j}(\beta-\mathrm{j}\alpha)\cdot z}}_{+z}+\underbrace{\mathbf{C_2}\cdot e^{+\mathrm{j}(\beta-\mathrm{j}\alpha)\cdot z}}_{-z}$
$\mathbf{U}(z)=\underbrace{\mathbf{C_1}\cdot e^{-\alpha z}e^{-\mathrm{j}\beta z}}_{+z}+\underbrace{\mathbf{C_2}\cdot e^{\alpha z}e^{\mathrm{j}\beta z}}_{-z}$	$\mathbf{E}(z)=\underbrace{\mathbf{C_1}\cdot e^{-\alpha z}e^{-\mathrm{j}\beta z}}_{+z}+\underbrace{\mathbf{C_2}\cdot e^{\alpha z}e^{\mathrm{j}\beta z}}_{-z}$
Z fyzikálního významu jednotlivých členů je vidět, že první část představuje vlnu v kladném směru osy z (s rostoucím z se tlumí amplituda a průběh se fázově zpožďuje), druhý člen představuje vlnu v záporném směru osy z.	
Konstanty $\mathbf{C_1},\mathbf{C_2}$ je nutno určit z okrajových podmínek - ze známé hodnoty pole v jednom místě.	
U vlny na vedení je třeba uvažovat vlnu v obou směrech osy z , tedy vlnu postupující přímo i odraženou. Je totiž třeba vždy uvažovat, že na konci vedení bude zapojena určitá impedance, od které se vlna může odrazit. To se samozřejmě týká i vedení na konci rozpojeného nebo zkratovaného.	U rovinné vlny je pro základní úvahy možné zkoumat pouze vlnu v kladném směru osy z, která nemá v cestě žádnou překážku, od které by se odrazila. Není tedy vždy nutné počítat s existencí vlny postupující v opačném směru osy z. Z toho vyplynula velikost konstanty: $C_2=0$
Konstanty $\mathbf{C_1}$ a $\mathbf{C_2}$ je možno stanovit za předpokladu, že známe velikost veličin - napětí a proudu - v jednom místě, tedy například na začátku nebo na konci vedení, podobné řešení je popsáno v {Př. VED/4}.	Velikost konstanty $\mathbf{C_1}$ se určila z předpokladu, že známe velikost pole v jednom místě, například v místě z=0, kde je intenzita elektrického pole popsána fázorem $\mathbf{E_0}$ $\mathbf{E}_x(z=0)=\mathbf{C_1}=\mathbf{E_0}=Em\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_0}$
Pro bezeztrátové vedení platí	Pro bezeztrátové prostředí platí
$R=0,G=0$	$\sigma=0$
$\boldsymbol{\gamma}=\alpha+\mathrm{j}\beta=\mathrm{j}\omega\sqrt{LC}$	$\mathbf{k}=\beta-\mathrm{j}\alpha=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$
$\alpha=0$	$\alpha=0$

$\beta = \omega\sqrt{LC} \overset{!}{=} \omega\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}$	$\beta = \omega\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}$

Poznámka Rovnost $LC = \mu \cdot \varepsilon$ je obecná vlastnost vedení s vlnou TEM

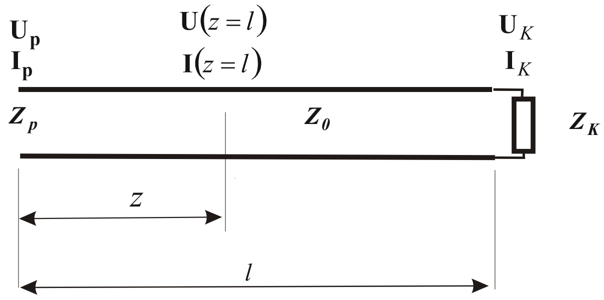
Pro bezeztrátové vedení platí stejný vztah pro vlnovou délku, jako pro bezeztrátové prostředí

$\lambda = \dfrac{2\pi}{\beta} = \dfrac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r}}$	$\lambda = \dfrac{2\pi}{\beta} = \dfrac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r}}$
Charakteristická impedance na vedení	Vlnová impedance
$\mathbf{Z_0} = \dfrac{\mathbf{U}_+(z)}{\mathbf{I}_+(z)} = -\dfrac{\mathbf{U}_-(z)}{\mathbf{I}_-(z)}$	$\mathbf{Z} = \dfrac{\mathbf{E_x}(z)}{\mathbf{H_y}(z)}$
$\mathbf{Z_0} = \dfrac{R + \mathrm{j}\omega \cdot L}{\boldsymbol{\gamma}}$	$\mathbf{Z} = \dfrac{\omega\mu}{\mathbf{k}}$
$\mathbf{Z_0} = \sqrt{\dfrac{R + \mathrm{j}\omega \cdot L}{G + \mathrm{j}\omega \cdot C}}$	$\mathbf{Z} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{j}\omega\mu}{\mathrm{j}\omega\varepsilon + \sigma}}$
Pro bezeztrátové vedení platí	Pro bezeztrátové prostředí platí
$R = 0, G = 0$	$\sigma = 0$
$\mathbf{Z_0} = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$	$\mathbf{Z} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$

{Př. VED/4} Vyjádření fázoru napětí a proudu na vedení v závislosti na hodnotách napětí a proudu na konci vedení

Jak budou vypadat rovnice pro fázory napětí a proudu v libovolném místě vedení pří známých hodnotách fázorů na konci vedení?

Navazuje na
{Př. VED/4} Vyjádření fázoru napětí a proudu na vedení v závislosti na hodnotách napětí a proudu na konci vedení



Velikost obecných konstant $\mathbf{C_1}$ a $\mathbf{C_2}$ ve vztazích pro fázory napětí a proudu v libovolném místě na vedení je třeba stanovit podle jednoho místa, ve kterém prohlásíme, že fázor napětí a proudu známe. Tím místem může být například konec vedení .

(Obr. VED-4) Poměry na začátku a na konci vedení

Když dosadíme fázory napětí a proudů, které budou na konci vedení - tedy na zátěži, do obecných vztahů (VED*4), (VED*5) bude platit:

$$\mathbf{U}(z = l) = \mathbf{U}_K = \mathbf{C_1} \cdot e^{-\gamma \cdot l} + \mathbf{C_2} \cdot e^{+\gamma \cdot l}$$

$$\mathbf{I}(z = l) = \mathbf{I}_K = \frac{\left(\mathbf{C_1} \cdot e^{-\gamma \cdot l} - \mathbf{C_2} \cdot e^{+\gamma \cdot l}\right)}{\mathbf{Z_0}}$$

Řešením těchto rovnic dostáváme vztahy pro konstanty C_1 a C_2

$$\mathbf{C_1} = \frac{\mathbf{U_K} + \mathbf{Z_0 I_K}}{2} \mathrm{e}^{+\gamma \cdot l}$$

$$\mathbf{C_2} = \frac{\mathbf{U_K} - \mathbf{Z_0 I_K}}{2} \mathrm{e}^{-\gamma \cdot l}$$

Pro fázory napětí a proudu dostaneme vztahy

$$\mathbf{U}(z)=\frac{\mathbf{U_K}+\mathbf{Z_0}\mathbf{I_K}}{2}\cdot e^{\gamma\cdot(l-z)}+\frac{\mathbf{U_K}-\mathbf{Z_0}\mathbf{I_K}}{2}\cdot e^{-\gamma\cdot(l-z)}$$

$$\mathbf{I}(z)=\frac{\frac{\mathbf{U_K}+\mathbf{Z_0}\mathbf{I_K}}{2}\cdot e^{+\gamma\cdot(l-z)}-\frac{\mathbf{U_K}-\mathbf{Z_0}\mathbf{I_K}}{2}\cdot e^{-\gamma\cdot(l-z)}}{\mathbf{Z_0}}$$

které je možno ještě upravit pomocí hyperbolických funkcí takto

$$\mathbf{U}(z)=\mathbf{U_K}\cdot\cosh(\gamma\cdot(l-z))+\mathbf{Z_0}\mathbf{I_K}\cdot\sinh(\gamma\cdot(l-z))$$

$$\mathbf{I}(z)=\mathbf{I_K}\cdot\cosh(\gamma\cdot(l-z))+\frac{\mathbf{U_k}}{\mathbf{Z_0}}\cdot\sinh(\gamma\cdot(l-z))$$

VED-b Impedance na vedení

{Př. VED/5} Impedance na vstupu vedení pomocí impedance na konci vedení

Jak lze vyjádřit impedanci na začátku vedení, známe-li impedanci na konci vedení, tedy impedanci, kterou je vedení zatíženo.

Navazuje na
{Př. VED/4} Vyjádření fázoru napětí a proudu na vedení v závislosti na hodnotách napětí a proudu na konci vedení

Když pomocí vztahů popisujících rozložení napětí a proudu vypočteme napětí a proud na začátku vedení pro z=0, dostaneme vzájemný vztah mezi veličinami na začátku a na konci vedení:

$$\mathbf{U}(z=0)=\mathbf{U_p}=\mathbf{U_K}\cdot\cosh(\gamma\cdot l)+\mathbf{Z_0}\mathbf{I_K}\cdot\sinh(\gamma\cdot l)$$

$$\mathbf{I}(z=0)=\mathbf{I_p}=\mathbf{I_K}\cdot\cosh(\gamma\cdot l)+\frac{\mathbf{U_k}}{\mathbf{Z_0}}\cdot\sinh(\gamma\cdot l)$$

Podělíme-li rovnice pro napětí a proud, dostaneme vztah

$$\mathbf{Z_p}=\frac{\mathbf{U_p}}{\mathbf{I_p}}=\frac{\mathbf{U_K}\cdot\cosh(\gamma\cdot l)+\mathbf{Z_0}\mathbf{I_K}\cdot\sinh(\gamma\cdot l)}{\mathbf{I_K}\cdot\cosh(\gamma\cdot l)+\frac{\mathbf{U_k}}{\mathbf{Z_0}}\cdot\sinh(\gamma\cdot l)}=\mathbf{Z_0}\frac{\frac{\mathbf{U_K}}{\mathbf{I_K}}+\mathbf{Z_0}\cdot\frac{\sinh(\gamma\cdot l)}{\cosh(\gamma\cdot l)}}{\mathbf{Z_0}+\frac{\mathbf{U_k}}{\mathbf{I_K}}\cdot\frac{\sinh(\gamma\cdot l)}{\cosh(\gamma\cdot l)}}$$

$$\mathbf{Z_p}=\mathbf{Z_0}\frac{\mathbf{Z_K}+\mathbf{Z_0}\cdot\tanh(\gamma\cdot l)}{\mathbf{Z_0}+\mathbf{Z_K}\cdot\tanh(\gamma\cdot l)}$$

Tato rovnice je velice důležitá, protože popisuje vztah mezi impedancí na začátku a konci vedení. Má tento význam: Známe-li charakteristickou impedanci vedení $\mathbf{Z_0}$, délku vedení a impedanci, která je připojena na konec vedení $\mathbf{Z_k}$, bude se tato soustava na začátku vedení jevit jako impedance $\mathbf{Z_p}$.
Pro bezeztrátové vedení se uvedené vztahy zjednoduší takto:

$$\alpha=0 \qquad \gamma=\mathrm{j}\beta$$

$$Z_0=\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\tanh(\gamma\cdot l)=\tanh(\mathrm{j}\beta.l)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta.l}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta.l}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta.l}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta.l}}=\frac{\cos(\beta.l)+\mathrm{j}\sin(\beta.l)-\cos(\beta.l)+\mathrm{j}\sin(\beta.l)}{\cos(\beta.l)+\mathrm{j}\sin(\beta.l)+\cos(\beta.l)-\mathrm{j}\sin(\beta.l)}=$$

$$=\frac{2\,\mathrm{j}\sin(\beta.l)}{2\cos(\beta.l)}=\mathrm{j}\tan(\beta.l)$$

$$\mathbf{Z_p}=Z_0\frac{\mathbf{Z_K}+\mathrm{j}Z_0\tan(\beta\cdot l)}{Z_0+\mathrm{j}\mathbf{Z_K}\tan(\beta\cdot l)}$$

{Př. VED/6} Činitel odrazu na vedení a poměr stojatých vln PSV?

Co je činitel odrazu na vedení a jaký má význam?

Pro vedení se zavádí zajímavý a užitečný činitel, který se nazývá **komplexní činitel odrazu na vedení**, udává podíl mezi fázorem odražené vlny a fázorem vlny postupující v přímém směru

$$\mathbf{U}(z) = \underbrace{\frac{\mathbf{U_K} + \mathbf{Z_0 I_K}}{2} \cdot e^{\gamma \cdot (l-z)}}_{U^+} + \underbrace{\frac{\mathbf{U_K} - \mathbf{Z_0 I_K}}{2} \cdot e^{-\gamma \cdot (l-z)}}_{U^-}$$

$$\mathbf{R}(z) = \frac{\mathbf{U}_-}{\mathbf{U}_+} = \frac{\frac{\mathbf{U_K} - \mathbf{Z_0 I_K}}{2} \cdot e^{-\gamma \cdot (l-z)}}{\frac{\mathbf{U_K} + \mathbf{Z_0 I_K}}{2} \cdot e^{\gamma \cdot (l-z)}} = \frac{\frac{\mathbf{U_K}}{\mathbf{I_K}} - \mathbf{Z_0}}{\frac{\mathbf{U_K}}{\mathbf{I_K}} + \mathbf{Z_0}} e^{-2\gamma \cdot (l-z)} = \frac{\mathbf{Z}_K - \mathbf{Z_0}}{\mathbf{Z}_K + \mathbf{Z_0}} e^{-2\gamma \cdot (l-z)}$$

Superpozicí vlny postupující v přímém směru a odražené vlny vzniká na vedení stojaté vlnění. Pro posouzení vlastností vedení s ohledem na existenci stojatých vln se definuje důležitý parametr, který se nazývá **poměr stojatých vln - činitel PSV**.

$$\rho = \frac{1 + |\mathbf{R}|}{1 - |\mathbf{R}|}$$

Je-li vedení zatíženo impedancí o stejné velikosti, jako je charakteristická impedance vedení

$$\mathbf{Z_K} = Z_0$$

bude činitel odrazu nulový, žádná odražená vlna nevznikne. Takové vedení se nazývá **přizpůsobené**. Poměr stojatých vln bude v tomto případě jednotkový, což je jeho nejmenší možná hodnota.
Je-li konec vedení zkratovaný nebo rozpojený

$$\mathbf{Z_K} \to \infty \text{ nebo } \mathbf{Z_K} = 0$$

bude mít činitel odrazu v každém místě jednotkovou absolutní hodnotu. Odráží se vlna se stoprocentní amplitudou. Poměr stojatých vln je v tomto případě nekonečně veliký. Poměr stojatých vln je tedy mírou přizpůsobení vedení a měl by se co nejvíce blížit k jedné.

{Př. VED/7} Vedení zatížené impedancí stejně velikou jako charakteristická impedance vedení

Jak se chová vedení, které je na konci zatížené stejně velikou impedancí, jako je charakteristická impedance vedení?

Navazuje na
{Př. VED/5} Impedance na vstupu vedení pomocí impedance na konci vedení

Po dosazení

$$\mathbf{Z_K} = Z_0$$

do obecné rovnice pro impedance

$$\mathbf{Z_p} = Z_0 \frac{\mathbf{Z_K} + \mathrm{j} Z_0 \tan(\beta \cdot l)}{Z_0 + \mathrm{j} \mathbf{Z_K} \tan(\beta \cdot l)}$$

vyplyne :

$$\mathbf{Z_p} = Z_0$$

Tato hodnota je zcela nezávislá na délce vedení. Z hlediska využitelnosti vedení je tento stav nanejvýš žádoucí. V jiném případě by délka vedení zásadně ovlivňovala hodnotu impedance zátěže, se kterou se tato hodnota převádí na vstup vedení. Pro činitel odrazu navíc bude v tomto případě platit

$$\mathbf{R}(z) = \frac{\mathbf{Z}_K - \mathbf{Z_0}}{\mathbf{Z}_K + \mathbf{Z_0}} e^{-2\gamma \cdot (l-z)} = 0$$

Tato skutečnost se dá charakterizovat těmito slovy. Při zatížení vedení impedancí o velikosti charakteristické impedance vedení bude činitel odrazu nulový, nevznikne žádná odražená vlna.
Poměr stojatých vln je v tomto případě

$$\rho = \frac{1 + |\mathbf{R}|}{1 - |\mathbf{R}|} = 1$$

Takovéto vedení se nazývá **přizpůsobené.** Podobného stavu se snažíme doplněním zátěže o vhodné reaktanční prvky vždy dosáhnout. Mluvíme o tom, že přizpůsobujeme impedanci zátěže charakteristické impedanci vedení.

{Př. VED/8} Vedení spojené na konci nakrátko

Jak se bude chovat úsek vedení, který je na konci spojen nakrátko?

Navazuje na
{Př. VED/5} Impedance na vstupu vedení pomocí impedance na konci vedení

Vlastnosti takového vedení můžeme posuzovat pomocí impedančních vztahů uvedených v {Př. VED/5} a používat je tak, jako by bylo vedení zatížené extrémní impedancí o nulové hodnotě

$$\mathbf{Z_K} = 0$$

Ze vztahu pro impedanci na začátku vedení

$$\mathbf{Z_p} = Z_0 \frac{\mathbf{Z_K} + \mathrm{j} Z_0 \tan(\beta \cdot l)}{Z_0 + \mathrm{j} \mathbf{Z_K} \tan(\beta \cdot l)}$$

potom vyplyne zjednodušený vztah

$$\mathbf{Z_p} = \mathrm{j} Z_0 \tan(\beta \cdot l)$$

Impedance na začátku vedení je tedy podstatně závislá na délce vedení. Pro další úvahy je vhodné nevyjadřovat délku vedení přímo v metrech, ale vztáhnout tuto hodnotu v poměru k vlnové délce na vedení

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \beta \cdot l = 2\pi \frac{l}{\lambda}$$

Dostáváme vztah, který udává hodnotu impedance odpovídající zkratovanému úseku vedení o delce ***l***

$$\mathbf{Z_p} = \mathrm{j} Z_0 \tan(2\pi \frac{l}{\lambda})$$

a můžeme posoudit chování takového vedení pro různé délky ve vztahu k vlnové délce na vedení

$l = \frac{\lambda}{8}$	$l = \frac{\lambda}{4}$	$l = \frac{3}{8}\lambda$	$l = \frac{\lambda}{2}$
$\tan(2\pi \frac{l}{\lambda}) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$	$\tan(2\pi \frac{l}{\lambda}) = \tan(\frac{\pi}{2}) \to \infty$	$\tan(2\pi \frac{l}{\lambda}) = \tan(\frac{3}{4}\pi) = -1$	$\tan(2\pi \frac{l}{\lambda}) = \tan(\pi) = 0$
$\mathbf{Z_p} = \mathrm{j} Z_0$	$\mathbf{Z_p} \to \infty$	$\mathbf{Z_p} = -\mathrm{j} Z_0$	$\mathbf{Z_p} = 0$
Vedení se na vstupu bude jevit jako induktivní reaktance o absolutní hodnotě stejné, jako je charakteristická impedance vedení.	Vedení se na vstupu bude jevit jako nekonečně veliká impedance, jako by bylo vedení rozpojeno. To se dá chápat i tak, že se daný úsek vedení dostal do paralelní rezonance.	Vedení se na vstupu bude jevit jako kapacitní reaktance o absolutní hodnotě stejné, jako je charakteristická impedance vedení.	Vedení se na vstupu bude jevit také jako vedení spojené nakrátko. Všechny vlastnosti vedení se totiž opakují s násobky poloviny vlnové délky.

Činitel odrazu jako podíl fázoru napětí vlny postupující přímo a odražené

$$\mathbf{R}(z) = \frac{\mathbf{U}_-}{\mathbf{U}_+} = \frac{\mathbf{Z}_K - \mathbf{Z_0}}{\mathbf{Z}_K + \mathbf{Z_0}} e^{-2\gamma\cdot(l-z)}$$

bude mít v každém místě vedení jednotkovou absolutní hodnotu, protože se vlna odráží se stoprocentní amplitudou

Poměr stojatých vln

$$\rho = \frac{1 + |\mathbf{R}|}{1 - |\mathbf{R}|} \to \infty$$

bude nekonečně veliký. Na vedení vznikne pouze stojatá - nepostupující - vlna.

{Př. VED/9} Jak se chová vedení na konci rozpojené

Jak se bude chovat úsek vedení, který je na konci rozpojen? Vedení je naprázdno.

Navazuje na
{Př. VED/5} Impedance na vstupu vedení pomocí impedance na konci vedení
{Př. VED/8} Vedení spojené na konci nakrátko

Vlastonosti takového vedení můžeme posuzovat pomocí impedančních vztahů uvedených v {Př. VED/5} a používat je tak, jako by bylo vedení zatížené extrémní impedancí o nekonečně velké hodnotě

$$\mathbf{Z_K} \rightarrow \infty$$

Ze vztahu pro impedanci na začátku vedení

$$\mathbf{Z_p} = Z_0 \frac{\mathbf{Z_K} + \mathrm{j} Z_0 \tan(\beta \cdot l)}{Z_0 + \mathrm{j} \mathbf{Z_K} \tan(\beta \cdot l)}$$

vyplyne zjednodušený vztah

$$\mathbf{Z_p} = \frac{Z_0}{\mathrm{j} \tan(\beta \cdot l)} = -\mathrm{j} \frac{Z_0}{\tan(\beta \cdot l)}$$

Po vyjádření součinu fázové konstanty a délky vedení pomocí fázové konstanty bude platit

$$\beta \cdot l = 2\pi \frac{l}{\lambda}$$

$$\mathbf{Z_p} = -\mathrm{j} \frac{Z_0}{\tan(2\pi \cdot \frac{l}{\lambda})}$$

V následující tabulce je popsáno, jak se takové vedení bude chovat pro různé délky ve vztahu k vlnové délce

$l = \frac{\lambda}{8}$	$l = \frac{\lambda}{4}$	$l = \frac{3}{8}\lambda$	$l = \frac{\lambda}{2}$
$\tan(2\pi \frac{l}{\lambda}) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$	$\tan(2\pi \frac{l}{\lambda}) = \tan(\frac{\pi}{2}) \rightarrow \infty$	$\tan(2\pi \frac{l}{\lambda}) = \tan(\frac{3}{4}\pi) = -1$	$\tan(2\pi \frac{l}{\lambda}) = \tan(\pi) = 0$
$\mathbf{Z_p} = -\mathrm{j} Z_0$	$\mathbf{Z_p} = 0$	$\mathbf{Z_p} = \mathrm{j} Z_0$	$\mathbf{Z_p} \rightarrow \infty$
Vedení se na vstupu bude jevit jako kapacitní reaktance o absolutní hodnotě stejné, jako je charakteristická impedance vedení.	Vedení se na vstupu bude jevit jako nulová impedance - tedy jako vedení spojené nakrátko. Je možné to vysvětlit také tím, že se úsek vedení dostal do sériové rezonance	Vedení se na vstupu bude jevit jako induktivní reaktance o absolutní hodnotě stejné, jako je charakteristická impedance vedení.	Vedení se na vstupu bude opět jevit jako nekonečně veliká impedance. Vlastnosti vedení se opakují s násobky poloviny vlnové délky

{Př. VED/10} Konstanta šíření na vedení - číselný příklad

Koaxiální kabel má průměr vnitřního vodiče a=0.8 mm a průměr pláště b=6 mm. Relativní permitivita izolačního materiálu mezi žilou a pláštěm je ε_r =5.8. Pro pracovní kmitočet f=10 MHz lze kabel považovat za bezeztrátový. Jak veliká je pro pracovní kmitočet konstanta šíření po vedení, vlnová délka a fázová rychlost?

Navazuje na
{Př. VED/1} Určení fázoru napětí řešením rovnice pro vlnu na vedení
{Př. VED/3} Srovnání veličin pro rovinnou harmonickou vlnu a vlnu na vedení

Pro konstantu šíření po vedení platí obecný vztah:

$$\boldsymbol{\gamma} = \alpha + \mathrm{j}\beta = \sqrt{(R + \mathrm{j}\omega \cdot L) \cdot (G + \mathrm{j}\omega \cdot C)}$$

Je-li vedení bezeztrátové, je možné předpokládat, že velikost podélného odporu R i svodové vodivosti G je nulová

$$R = 0, G = 0$$

Vztah pro konstantu šíření se potom redukuje na

$$\boldsymbol{\gamma} = \alpha + \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\omega\sqrt{LC}$$

Z toho vyplývá, že

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \overset{!}{=} \omega\sqrt{\mu\cdot\varepsilon} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r} \qquad \beta = 0.504\ m^{-1}$$

Fázová konstanta pro vlnu na bezeztrátovém vedení je stejná jako pro rovinnou vlnu v neomezeném prostoru se stejnými parametry. Pro každé symetrické dvouvodičové vedení totiž platí pro součin L.C

$$L\cdot C = \frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \mu\varepsilon$$

Indukčnost na jednotku délky koaxiálního kabelu je

$$L = \frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad L = 4.03\cdot10^{-7}\ H/m$$

Kapacita na jednotku délky koaxiálního kabelu je

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \qquad C = 1.601\cdot10^{-10}\ F/m$$

Vlnová délka je tedy

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r}} \qquad \lambda = 12.457\ m$$

Fázová rychlost je

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \qquad v_f = 1.246\cdot10^{8}\ m/s$$

{Př. VED/11} Charakteristická impedance koaxiálního kabelu - číselný příklad

Koaxiální kabel má průměr vnitřního vodiče a=0.8 mm a průměr pláště b=6 mm. Relativní permitivita izolačního materiálu mezi žilou a pláštěm je $\boldsymbol{\varepsilon_r}$ =5.8. Pro pracovní kmitočet f=10 MHz lze kabel považovat za bezeztrátový. Jak veliká je charakteristická impedance vedení?

Navazuje na
{Př. VED/1} Určení fázoru napětí řešením rovnice pro vlnu na vedení
{Př. VED/3} Srovnání veličin pro rovinnou harmonickou vlnu a vlnu na vedení
{Př. VED/10} Konstanta šíření na vedení - číselný příklad

Pro charakteristickou impedanci vedení platí obecný vztah:

$$\mathbf{Z_0} = \sqrt{\frac{R + \mathrm{j}\omega\cdot L}{G + \mathrm{j}\omega\cdot C}}$$

Je-li vedení bezeztrátové, je možné předpokládat, že velikost podélného odporu R i svodové vodivosti G je nulová

$$R = 0, G = 0$$

Po dosazení za L a C z {Př. VED/10}

$$L = 4.03\cdot10^{-7}\ H/m \qquad C = 1.601\cdot10^{-10}\ F/m$$

se vztah pro charakteristickou impedanci se redukuje na

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 50\,\Omega$$

{Př. VED/12} Impedance na vstupu zatíženého vedení - číselný příklad 1

Koaxiální kabel stejný jako v {Př. VED/10} o charakteristické impedanci $\mathbf{Z_0}$ = 50 Ω má délku 10 m a je na konci zatížen impedancí o velikosti $\mathbf{Z_k}$ =50+j50 Ω. Jak se tato impedance zátěže jeví na vstupu vedení ?

Navazuje na
{Př. VED/5} Impedance na vstupu vedení pomocí impedance na konci vedení
{Př. VED/10} Konstanta šíření na vedení - číselný příklad

Pro impedanci na vstupu vedení o délce ***l***, známe-li impedanci zátěže a charakteristickou impedanci vedení, platí u bezeztrátového vedení obecný vztah

$$\mathbf{Z_p} = Z_0 \frac{\mathbf{Z_K} + \mathrm{j} Z_0 \tan(\beta \cdot l)}{Z_0 + \mathrm{j}\mathbf{Z_K} \tan(\beta \cdot l)}$$

V některých případech je výhodné vztahovat délku vedení k vlnové délce

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

základní vztah se potom upraví na

$$\mathbf{Z_p} = \mathbf{Z_0} \frac{\mathbf{Z_K} + \mathrm{j} Z_0 \tan\left(2\pi \cdot \frac{l}{\lambda}\right)}{Z_0 + \mathrm{j}\mathbf{Z_K} \tan\left(2\pi \cdot \frac{l}{\lambda}\right)}$$

Pro zadanou délku vedení ***l=10 m*** je impedance na vstupu vedení pro vlnovou délku podle {Př. VED/10}

$$\lambda = 12{,}457\ m$$

$$\mathbf{Z_p} = 19{,}92 - \mathrm{j}9{,}57\Omega$$

{Př. VED/13} Impedance na vstupu zatíženého vedení - číselný příklad 2

Koaxiální kabel stejný jako v {Př. VED/10} o charakteristické impedanci Z_0 = 50 Ω je na konci zatížen impedancí o velikosti Z_k=50+j50 Ω.

Jaká bude jevit impedance zátěže na konci vedení dlouhého: a) $l = \frac{\lambda}{2}$ b) $l = \frac{\lambda}{4}$

Navazuje na
{Př. VED/5} Impedance na vstupu vedení pomocí impedance na konci vedení
{Př. VED/10} Konstanta šíření na vedení - číselný příklad

Pro impedanci na vstupu vedení o délce ***l***, známe-li impedanci zátěže a charakteristickou impedanci vedení, platí u bezeztrátového vedení obecný vztah:

$$\mathbf{Z_p} = \mathbf{Z_0} \frac{\mathbf{Z_K} + \mathrm{j} Z_0 \tan(\beta \cdot l)}{Z_0 + \mathrm{j}\mathbf{Z_K} \tan(\beta \cdot l)}$$

V některých případech je výhodné vztahovat délku vedení k vlnové délce

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

vztah přejde na

$$\mathbf{Z_p} = \mathbf{Z_0} \frac{\mathbf{Z_K} + \mathrm{j} Z_0 \tan\left(2\pi \cdot \frac{l}{\lambda}\right)}{Z_0 + \mathrm{j}\mathbf{Z_K} \tan\left(2\pi \cdot \frac{l}{\lambda}\right)}$$

a) Pro vedení o délce

$$l = \frac{\lambda}{2}$$

se bude impedance zátěže jevit na vstupu vedení jako impedance o stejné hodnotě:

$$\mathbf{Z_p} = Z_0 \frac{\mathbf{Z_K} + \mathrm{j} Z_0 \tan\left(2\pi \cdot \frac{1}{2}\right)}{Z_0 + \mathrm{j}\mathbf{Z_K} \tan\left(2\pi \cdot \frac{1}{2}\right)} = \mathbf{Z_k}$$

b) Pro vedení o délce

$$l = \frac{\lambda}{4}$$

se bude impedance zátěže jevit na vstupu vedení jako admitance (převrácená hodnota) násobená koeficientem $Z_0^{\;2}$.

$$\mathbf{Z_p} = Z_0 \frac{\mathbf{Z_K} + \mathrm{j} Z_0 \tan\left(2\pi \cdot \frac{1}{4}\right)}{Z_0 + \mathrm{j}\mathbf{Z_K} \tan\left(2\pi \cdot \frac{1}{4}\right)} = \frac{Z_0^{\;2}}{\mathbf{Z_K}} = 25 - \mathrm{j}25\ \Omega$$

{Př. VED/14} Impedance na vstupu zatíženého vedení - číselný příklad 3

Mějme bezeztrátový koaxiální kabel délky ***l*=2,8 m** s naměřenými parametry **C/l=25pF/m**, **L/l=15nH/m**. Vypočtěme jeho charakteristickou impedanci $\mathbf{Z_0}$,vlnovou délku na vedení a vstupní impedanci $\mathbf{Z_P}$, je-li kabel zakončen sériovou kombinací odporu **R=150 Ω** a indukčnosti **L=60 nH**. Pracovní frekvence je **f=300 MHz.**

Navazuje na
{Př. VED/5} Impedance na vstupu vedení pomocí impedance na konci vedení
{Př. VED/10} Konstanta šíření na vedení - číselný příklad

Charakteristická impedance je v případě bezeztrátového vedení čistě reálná:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 10^{-9}}{25 \cdot 10^{-12}}} = 22,5\ \Omega$$

Fázová konstanta na vedení

$$\beta = \omega\sqrt{LC} = 2\pi \cdot 300 \cdot 10^{6} \sqrt{15 \cdot 10^{-9} \cdot 25 \cdot 10^{-12}} = 1,154\ m^{-1}$$

Vlnová délka na vedení

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{1.154} = 5.44\ m$$

Kabel je zakončen impedancí

$$\mathbf{Z_K} = R + \mathrm{j}X = R + \mathrm{j}\omega L = (150 + \mathrm{j}113,1)\ \Omega$$

impedance na vstupu je

$$\mathbf{Z_P} = Z_0 \frac{\mathbf{Z_K} + \mathrm{j} Z_0 \tan(\beta \cdot l)}{Z_0 + \mathrm{j}\mathbf{Z_K} \tan(\beta \cdot l)} = (229,3 - \mathrm{j}40.5)\ \Omega$$

To odpovídá sériově řazenému odporu R=223,3 Ω a kondenzátoru

$$C = \frac{1}{\omega X} = \frac{1}{2\pi \cdot 300 \cdot 10^{6} \cdot 40,5} = 13.1\ pF$$

{Př. VED/15} Činitel odrazu a poměr stojatých vln - číselný příklad

Koaxiální kabel pro televizní rozvody s charakteristickou impedancí $\mathbf{Z_0=75\ \Omega}$ je připojen k anténě s impedancí $\mathbf{Z_K=50\ \Omega}$. Vypočtěte poměr stojatých vln na vedení a výkon prošlý do antény, dodává-li vysílač do kabelu výkon **P=250 W.**

Navazuje na
{Př. VED/6} Činitel odrazu na vedení a poměr stojatých vln PSV?

Nejprve vypočteme modul napěťového činitele odrazu R:

$$|\mathrm{R}| = \left|\frac{\mathrm{Z}_K - \mathrm{Z}_0}{\mathrm{Z}_K + \mathrm{Z}_0}\right| = \left|\frac{50-75}{50+75}\right| = 0.2$$

Z toho PSV je

$$\rho = \frac{1+|\mathrm{R}|}{1-|\mathrm{R}|} = 1.5$$

Pro výkonovou bilanci je třeba ještě definovat výkonový činitel prostupu a odrazu
Výkonový činitel odrazu

$$R_P = |R|^2 = 0.2^2 = 0.04$$

4 % výkonu se tedy odrazí od antény zpět k vysílači
Výkonový činitel prostupu

$$T_P = 1-|R|^2 = 0.04^2 = 0.96$$

96 % výkonu projde do antény.
Hodnota prošlého výkonu do antény bude

$$P_A = P \cdot T_P = 250 \cdot 0.96 = 240\mathrm{W}$$

10 W se v důsledku odrazu na impedančním přechodu vrátí zpět k vysílači.

{Př. VED/16} Vedení spojené na konci nakrátko - číselný příklad

Navrhněte bleskojistku pro pásmo CB (**f=27 MHz**) realizovanou jako zkratovaný úsek koaxiálního kabelu s teflonovým dielektrikem ($\boldsymbol{\varepsilon_r=2.2}$).

Navazuje na
{Př. VED/16} Vedení spojené na konci nakrátko - číselný příklad

Takové vedení se musí z vysokofrekvenčního hlediska chovat jako otevřený konec, $Z_p \to \infty$. Toho je možné dosáhnout při jeho elektrické délce $\lambda_g/4$.
Vlnová délka ve volném prostoru je

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3\cdot 10^8}{27\cdot 10^6} = 11.1\, m$$

Na daném vedení je pak vlnová délka

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{11.1}{\sqrt{2.2}} = 7.49\, m$$

Poznámka: Pro koaxiální kabely je často tabelován tzv. zkracovací koeficient ***k***, udávající poměr délky vlny na vedení λ_g ku vlnové délce ve volném prostoru λ_0:

$$k = \frac{\lambda_g}{\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

Potřebná délka kabelu pro výrobu bleskojistky je

$$l = \frac{k\lambda_0}{4} = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{\lambda_g}{4} = \frac{7.49}{4} = 1.873\, m.$$

Coufalová,B.,Havlíček,V., Mikulec,M.,Novotný,K.:	Teorie elektromagnetického pole I - příklady	ČVUT	1996
Haňka,L.:	Teorie elektromagnetického pole (původní rozsáhlé vydání)	SNTL	1975
Haňka,L.:	Teorie elektromagnetického pole (přepracované ztenčené vydání)	SNTL	1982
Mayer,D.,Polák,J.:	Metody řešení elektrických a magnetikých polí	SNTL	1983
Novotný,K.:	Teorie elektromagnetického pole I	ČVUT	2000
Trnka,Z.:	Teoretická elektrotechnika	SNTL	1972