V Nestacionární elektromagnetické pole

NES-a Obecné vztahy

Diferenciální rovnice, která popisuje obecně chování elektromagnetického pole v libovolném prostředí, vychází ze dvou základních Maxwellových rovnic.
První je Faradayův indukční zákon, který v sobě odráží skutečnost, že časová změna magnetického pole vyvolává časově proměnné elektrické pole

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \text{(NES*1)}$$

Druhá rovnice je zobecněný Ampérův zákon celkového proudu, který naopak udává, že časová změna elektrického pole vyvolává časově proměnné magnetické pole

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad \text{(NES*2)}$$

Časově proměnné elektromagnetické pole je duální, má elektrickou a magnetickou složku a jedna neexistuje bez druhé.

Veličiny v elektrickém i magnetickém poli jsou vázány vztahy, které se nazývají materiálové. Jsou to vztahy, které odrážejí vlastnosti materiálu s ohledem na jeho chování v elektromagnetickém poli.

V magnetickém poli jsou veličiny vázány vztahem, který v sobě odráží vliv **magnetizace** materiálu. V případě lineárního prostředí je tato závislost lineární a platí

$$\boldsymbol{B} = \mu\,\boldsymbol{H} \qquad \text{(NES*3)}$$

V elektrickém poli jsou veličiny vázány vztahem, který v sobě zahrnuje jev **polarizace** materiálu. V případě lineárního prostředí i zde platí

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\,\boldsymbol{E} \qquad \text{(NES*4)}$$

Vliv **elektrické vodivosti** materiálu v elektrickém proudovém poli zahrnuje Ohmův zákon v diferenciálním tvaru

$$J = \sigma\,\boldsymbol{E} \qquad \text{(NES*5)}$$

V závislosti na povaze řešeného problému v elektromagnetickém poli je možné si vybrat jednu veličinu z elektrického pole a jednu veličinu z magnetického pole, dosadit do rovnic (NES*1) ,(NES*2) a celý problém řešit jako soustavu dvou diferenciálních rovnic o dvou neznámých. Když si jako hledané veličiny zvolíme například intenzitu elektrického pole **E** a intenzitu magnetického pole **H**, přejdou diferenciální rovnice s použitím materiálových vztahů do tvaru

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \qquad \text{(NES*6)}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \sigma\,\boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad \text{(NES*7)}$$

V této soustavě je možné jednu z veličin eliminovat, ale není to tak snadné jako v běžné algebraické rovnici. Na levé straně každé rovnice se vždy nachází operátor **rotace**, který v sobě obsahuje parciální derivace složek vektorové veličiny podle souřadnic, na pravé straně je **časová derivace** vektorové veličiny. Eliminaci se podaří uskutečnit opětovnou aplikací operátoru rotace na jednu z rovnic, například na rovnici (NES*6) . Potom po dosazení z rovnice (NES*7) dostaneme

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}$$

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} - \nabla^2\boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\sigma\,\boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t})$$

Budeme-li řešit problémy elektromagnetického pole mimo oblast zdrojů a navíc ještě v kartézské soustavě, zjednoduší se rovnice na

$$\Delta \boldsymbol{E} - \mu\,\sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu\,\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \,. \qquad \text{(NES*8)}$$

Tato parciální diferenciální rovnice se nazývá vlnová a popisuje nestacionární elektromagnetické pole.

NES-b Rovinná harmonická elektromagnetická vlna

{Př. NES/1} Řešení vlnové rovnice - rovinná harmonická elektromagnetická vlna

Co je řešením vlnové rovnice pro intenzitu elektrického pole **E** za předpokladu, že všechny veličiny jsou harmonicky časově proměnné a intenzita elektrického pole má složku pouze v jednom směru?

Budeme-li chtít vyřešit rovnici (NES*8), museli bychom ve zcela obecném případě předpokládat, že se veličiny elektromagnetického pole budou měnit v závislosti na čase podle obecné funkce a mohou být v prostoru natočeny do všech možných směrů a tedy popsány obecnými funkcemi souřadnic. V kartézské soustavě to například znamená, že vektor intenzity elektrického pole bude mít složky ve směru ***x,y,z*** a každá z nich bude obecnou funkcí času a místa v prostoru

$$\boldsymbol{E} = \left(E_x(x,y,z,t), E_y(x,y,z,t), E_z(x,y,z,t)\right)$$

Obecné řešení parciální diferenciální rovnice (NES*8) za těchto předpokladů není možné, lze však najít určitá zjednodušená řešení, která mají i tak dost velký praktický význam.

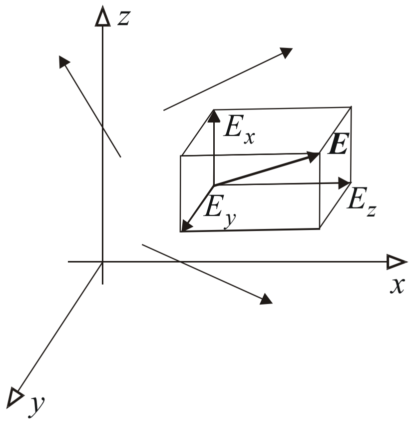
Jedno z takových řešení vlnové rovnice se nazývá **rovinná harmonická elektromagnetická vlna**. Pojem rovinná vyplyne ze základního předpokladu, že nebudeme zkoumat obecné pole, ale pole, které má elektrickou nebo magnetickou složku orientovanou pouze v jednom směru. Například intenzitu elektrického pole orientovanou v kladném směru osy ***x***. Tato složka se navíc nebude měnit v prostoru obecně, v našem případě bude funkcí pouze souřadnice ***z***. Celý zápis se podstatně zjednoduší

$$\boldsymbol{E} = \left(\underbrace{E_x(x,y,\underline{z,t})}_{E_x(\underline{z,t})}, \underbrace{E_y(x,y,z,t)}_{0}, \underbrace{E_z(x,y,z,t)}_{0} \right)$$

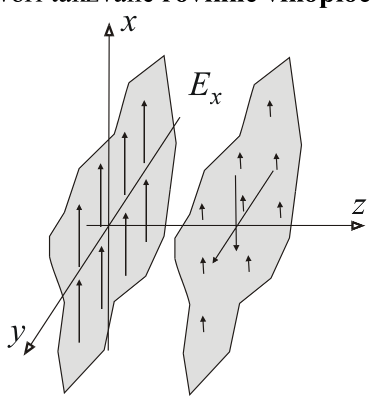
z celé vektorové veličiny E zbude pouze jediná složka

$$E_x(\underline{z,t})$$

Poslední rovnici lze interpretovat tak, že vektory intenzity elektrického pole, které mají pouze složku ***x***, musí být konstantní na rovinách rovnoběžných s osami ***x*** a ***y***, tvoří takzvané **rovinné vlnoplochy.**



(Obr. NES-1) Obecný směr vektoru intenzity elektrického pole



(Obr. NES-2) Rovinné vlnoplochy vektoru intenzity elektrického pole

Z Laplaceova operátoru, který se vyskytuje na levé straně vlnové rovnice, zůstane pouze jeden nenulový člen

$$\Delta \boldsymbol{E} = \boldsymbol{x_0}\left(\underbrace{\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}}_{0}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right)+\underbrace{y_0\left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right)}_{0}+\underbrace{z_0\left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right)}_{0}=\boldsymbol{x_0}\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

Z vlnové rovnice pro intenzitu elektrického pole vymizí vektory, rovnice přejde do tvaru

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2}-\mu\,\sigma\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t}-\mu\,\varepsilon\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2}=0$$

Když navíc ještě ustoupíme od obecné časové závislosti a přijmeme předpoklad, že se veličiny mění v závislosti na čase podle harmonické funkce, můžeme použít transformaci do komplexní roviny, zavést fázory veličin a zbavit se tak závislosti na čase. Taková elektromagnetická vlna se potom nazývá **harmonická.** Podle známého transformačního vztahu

$$E_x(z,t)=\mathrm{Im}\left[\mathbf{E_x(z)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

přejde parciální diferenciální rovnice na obyčejnou, časové derivace jsou nahrazeny násobky **j$\boldsymbol{\omega}$**

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\mathbf{E_x(z)}}{\mathrm{d}z^2}-\mathrm{j}\omega\mu\,\sigma\,\mathbf{E_x(z)}+\omega^2\mu\,\varepsilon\,\mathbf{E_x(z)}=0$$

V této rovnici již nevystupují skutečné časové průběhy veličin, ale jejich **obrazy v komplexní rovině,** které se nazývají f**ázory**. Rovnici lze s použitím komplexní konstanty **k**, která se zde vyskytuje ve druhé mocnině

$$\mathbf{k}^2=-\mathrm{j}\omega\mu\,(\mathrm{j}\omega\varepsilon+\sigma)$$

převést do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\mathbf{E_x(z)}}{\mathrm{d}z^2}-\mathrm{j}\omega\mu\,(\mathrm{j}\omega\varepsilon+\sigma)\mathbf{E_x(z)}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\mathbf{E_x(z)}}{\mathrm{d}z^2}+\mathbf{k}^2\mathbf{E_x(z)}=0 \qquad \text{(NES*9)}$$

Konstanta **k** má při popisu elektromagnetického vlnění zásadní význam, nazývá se **konstanta šíření** a jako komplexní veličina má dvě složky. Později bude ukázáno, že **reálná část** souvisí s fázovým posuvem veličin, **nazývá se proto fázová konstanta** a **imaginární část** souvisí s útlumem amplitud veličin, nazývá se **měrný útlum**.

$$\mathbf{k}=\beta-\mathrm{j}\alpha$$

Řešení rovnice (NES*9) lze nalézt ve tvaru

$$\mathbf{E_x(z)}=\mathbf{C_1}\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\mathbf{k}z}}_{\to -z}+\mathbf{C_2}\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\mathbf{k}z}}_{\to +z}$$

Výsledkem je tedy rovnice pro fázor intenzity elektrického pole, $\mathbf{C_1}$ a $\mathbf{C_2}$ jsou obecné komplexní konstanty, jejichž velikost se určí z okrajových podmínek. Pravý člen rovnice představuje vlnu šířící se v kladném směru osy *z*, levý člen vlnu šířící se v záporném směru osy *z*. Na základě uvedených poznatků však vůbec ještě není patrné, že se jedná o elektromagnetickou vlnu, natož v jakém směru by se měla šířit. Že to tak skutečně je, bude možné se přesvědčit později.
Pro jednoduchost lze předpokládat, že existuje pouze vlna šířící se v kladném směru osy *z*, které nestojí nic v cestě, aby mohla vzniknout vlna odražená

$$\mathbf{E_x(z)}=\mathbf{C_2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\mathbf{k}z}$$

Aby bylo řešení jednoznačné, musíme do výpočtu začlenit určité okrajové podmínky, což v tomto případě znamená, že musíme přiřadit **jednomu místu** jednu **konkrétní velikost fázoru intenzity elektrického pole**. Prohlásíme tím tedy, že v jednom bodě fázor intenzity elektrického pole známe a na základě toho ho potom budeme moci určit v libovolném místě. Zvolíme-li za toto místo počátek souřadnic, bude mít konstanta $\mathbf{C_2}$ význam velikosti fázoru pro z=0

$$\mathbf{E_x}(z=0)=\mathbf{C_2}=\mathbf{E_0}=E_m e^{\mathrm{j}\varphi 0}$$

Každý fázor, i fázor intenzity elektrického pole v bodě z=0, má amplitudu a určitý fázový posun. Význam těchto členů bude ukázán v dalším řešení. Pro **fázor intenzity elektrického pole** platí po dosazením všech parametrů konečný vztah

$$\mathbf{E_x(z)} = \mathbf{E_0}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\mathbf{k}z} = \underbrace{E_m\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_0}}_{\mathbf{E_0}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\overbrace{(\beta - j\alpha)}^{\mathbf{k}}z}$$

Po zpětné transformaci z fázorové do časové roviny

$$E_x(z,t) = \mathrm{Im}\left[\mathbf{E_x(z)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \mathrm{Im}\left[E_m\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_0} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta - j\alpha)z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

obdržíme výslednou rovnice v časovém tvaru

$$E_x(z,t) = E_m\, \mathrm{e}^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta\, z + \varphi_0) \qquad \text{(NES*10)}$$

Význam jednotlivých členů vlnové rovnice bude dobře patrný, když si zobrazíme funkci intenzity elektrického pole ve dvou bodech na ose *z*. Takové časové průběhy by viděl pozorovatel, kdyby měl v těchto bodech možnost snímat intenzitu elektrického pole.

Zobrazíme-li tuto funkci nejprve v počátku pro z=0 viz obrázek (Obr. NES-3), jedná se o obyčejný harmonický průběh veličiny s amplitudou E_m.

$$E_x(z=0,t) = E_m \sin(\omega t + \varphi_0)\,,$$

Úhel φ_0 představuje počáteční fázový posuv, určuje okamžitou hodnotu intenzity elektrického pole v bodě z=0 a čase t=0

$$E_x(z=0, t=0) = E_m \sin(\varphi_0)$$

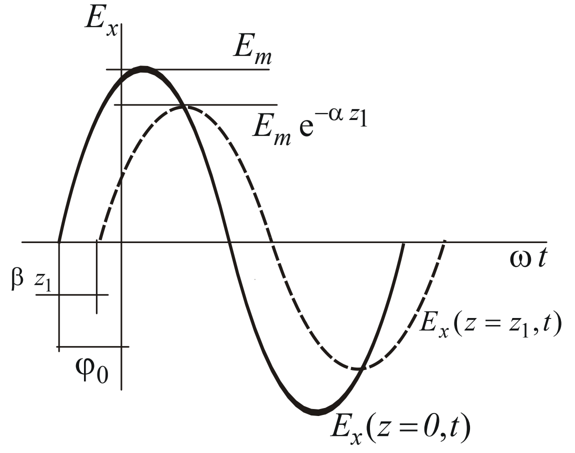
Postoupíme-li dále po ose *z* do bodu z=z1, bude mít časový průběh popisující intenzitu elektrického pole tvar

$$E_x(z=z_1,t) = E_m\, \mathrm{e}^{-\alpha \cdot z_1} \sin(\omega t - \beta\, z_1 + \varphi_0)$$

Srovnáme-li oba časové průběhy, zjistíme, že se intenzita elektrického pole při postupu z bodu z=0 do bodu z=z1 poněkud utlumila, zmenšila svojí amplitudu a to

$$\mathrm{e}^{-\alpha \cdot z_1} \times$$

Je tedy vidět, že konstanta **α** v exponenciálním členu určuje po vynásobení vzdáleností velikost tlumení amplitudy elektrického pole ve směru osy *z*, nazývá se proto **měrný útlum**. Ze znaménka mínus v exponentu je dále vidět, že se musí jednat o vlnu postupující v kladném směru osy *z*. Jak se zvětšuje vzdálenost, zvětšuje se i záporný člen v exponentu, vlna se tlumí. V opačném případě by to znamenalo, že vlna při postupu v kladném směru osy *z* svojí amplitudu zvětšuje, což není možné.



(Obr. NES-3) Časové průběhy veličin rovinné harmonické elektromagnetické vlny

Intenzita elektrického pole se navíc při postupu do bodu z=z1 fázově posune o úhel

$$\beta \cdot z_1$$

Znaménko mínus znamená, že se veličina o tento úhel **zpozdí**. Konstanta ***β*** tedy určuje fázový posuv veličin, je to v podstatě fázový posuv na jednotku délky a nazývá se **fázová konstanta**.

Celý jev můžeme zjednodušeně interpretovat tak, že elektromagnetická vlna, která postupuje v kladném směru osy z, se postupně tlumí a fázově zpožďuje. Nejprve vlna dospěje do bodu z=0, potom s určitým zpožděním do bodu z=z1, navíc ale ještě s poněkud menší amplitudou.
Oba časové průběhy jsou porovnány na obrázku (Obr. NES-3).

{Př. NES/2} Intenzita magnetického pole u rovinné elektromagnetické vlny

Jak lze u rovinné harmonické elektromagnetické vlny odvodit fázor a časový průběh veličin magnetického pole pomocí veličin elektrického pole?

Navazuje na
NES-a Obecné vztahy
{Př. NES/1} Řešení vlnové rovnice - rovinná harmonická elektromagnetická vlna

V příkladě {Př. NES/1} byl ze soustavy rovnic

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

za předpokladů platných pro rovinnou harmonickou elektromagnetickou vlnu odvozen vztah pro fázor intenzity elektrického pole

$$\mathbf{E_x(z)} = \mathbf{E_0}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\mathbf{k}z} .$$

Druhou neznámou veličinu, intenzitu magnetického pole **H,** je možné dostat zpětným dosazením do první rovnice převedené do fázorového tvaru

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -j\omega\mu\, \mathbf{H} \qquad \text{(NES*11)}$$

Rotaci na levé straně lze vyčíslit takto

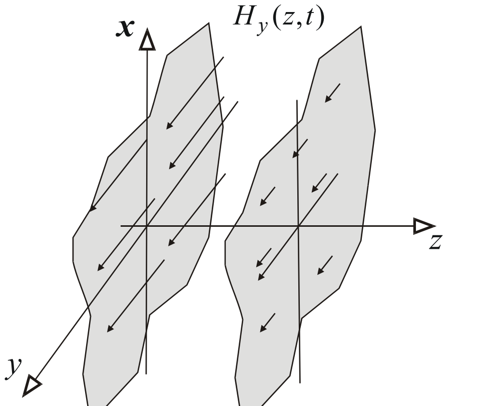
$$\operatorname{rot} E = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x_0} & y_0 & z_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & \underbrace{E_y}_{0} & \underbrace{E_z}_{0} \end{vmatrix} = y_0 \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} = y_0\left(-\mathrm{j}k\, E_x(z)\right)$$

Rotace intenzity elektrického pole má pouze složku ve směru osy ***y***.
Srovnáním levé a pravé strany rovnice (NES*11) je vidět, že původně obecný vektor intenzity magnetického pole musí mít také pouze jednu složku, a to ve směru osy ***y***

$$y_0\left(-\mathrm{j}\mathbf{k}\, z\, \mathbf{E_x}\right) = -j\,\omega\mu(\boldsymbol{x_0}\mathbf{H_x} + y_0\mathbf{H_y} + z_0\mathbf{H_z})$$

$$\mathbf{H_x}, \mathbf{H_z} = 0$$

$$\mathbf{H_y}(z) = \frac{\mathbf{k}}{\omega\mu}\mathbf{E_x}(z) = \frac{\mathbf{E_x}(z)}{\mathbf{Z}}$$



(Obr. NES-4) Rovinné vlnoplochy - intenzita magnetického pole

Vztah mezi fázorem intenzity elektrického a magnetického pole udává veličina **Z,** která je také komplexní a nazývá se **vlnová impedance**

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{E_x}}{\mathbf{H_y}} = \frac{\omega\mu}{\mathbf{k}} .$$

Vlnová impedance má absolutní hodnotu a argument, jejichž význam vyplyne z dalšího textu

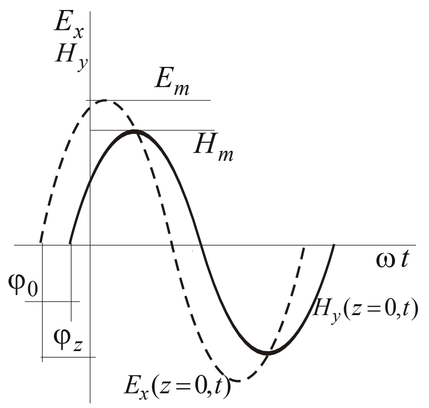
$$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}| e^{\mathrm{j}\varphi_z} .$$

S použitím vlnové impedance vychází pro intenzitu magnetického pole vztah

$$\mathbf{H_y}(z) = \frac{\mathbf{E_x}(z)}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{E_0} e^{-\mathrm{j}\mathbf{k}z}}{|\mathbf{Z}| \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_z}} = \frac{E_m e^{\mathrm{j}\varphi_0} e^{-\mathrm{j}\mathbf{k}z}}{|\mathbf{Z}| \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_z}} = \frac{E_m e^{\mathrm{j}(\varphi_0 - \varphi_z)}}{|\mathbf{Z}|} e^{-\mathrm{j}\mathbf{k}z} = \mathbf{H_0} e^{-\mathrm{j}\mathbf{k}z}$$

$\mathbf{H_0}$ je fázor intenzity magnetického pole v bodě z=0 a platí pro něj

$$\mathbf{H_0} = \frac{\mathbf{E_0}}{|\mathbf{Z}| \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_z}} = \frac{E_m e^{\mathrm{j}(\varphi_0 - \varphi_z)}}{|\mathbf{Z}|} = H_m e^{\mathrm{j}(\varphi_0 - \varphi_z)}$$



(Obr. NES-5) Časový průběh intenzity elektrického a magnetického pole v bodě z=0

Časový průběh intenzity magnetického pole dostaneme zpětnou transformací z fázorové do časové roviny

$$H_\mathrm{y}(\mathrm{z},t) = \mathrm{Im}\left[\mathbf{H}_\mathrm{y}(z) e^{-\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$H_y(z,t) = H_m\, \mathrm{e}^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z - \varphi_z + \varphi_0)$$

Absolutní hodnota vlnové impedance udává podíl amplitudy intenzity elektrického a magnetického pole

$$H_m = \frac{E_m}{|\mathbf{Z}|}$$

Srovnáme-li časový průběh intenzity elektrického a magnetického pole v určitém bodě, například bodě z=0

$$H_y(z=0,t) = H_m \sin(\omega t - \varphi_z + \varphi_0)$$

uvidíme, že úhel $\boldsymbol{\varphi_z}$ představuje fázový úhel, o který je intenzita magnetického pole zpožděna za intenzitou elektrického pole. Je to podobná situace, jako vztah mezi napětím a proudem v obvodu s indukčností. Proud je fázově (časově) zpožděn o určitý úhel za napětím, viz obrázek (Obr. NES-5).

NES-c Výkon přenášený elektromagnetickou vlnou, Poyntingův vektor

{Př. NES/3} Činný výkon přenášený rovinnou vlnou - střední hodnota Poyntingova vektoru

Jak velký výkon je přenášený rovinnou harmonickou elektromagnetickou vlnou?

Přenášený výkon je popsán vektorovou veličinou, která se nazývá **Poyntingův vektor** a představuje v určitém místě plošnou hustotu výkonu, který projde plochou kolmou na směr šíření. Poyntingův vektor je obecně definován vztahem

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$$

Celkový výkon, který projde určitou plochou, se dá potom stanovit podle vztahu

$$\boldsymbol{S} = \iint_S \left(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}\right) \mathrm{d}\,\boldsymbol{S}$$

V případě rovinné vlny má intenzita elektrického pole pouze složku ve směru osy $\boldsymbol{x}$

$$E_x(z,t)$$

a intenzita magnetického pole pouze složku ve směru $\boldsymbol{y}$

$$H_y(z=0,t)$$

Vektory **E** a **H** jsou na sebe kolmé, výsledný vektor z vektorového součinu bude současně kolmý na oba tyto vektory, půjde tedy ve směru osy **z**. Výkon se bude tedy šířit pouze ve směru osy **z**, což je logické, neboť to je směr, ve kterém se šíří elektromagnetická vlna. Plošná hustota výkonu bude mít okamžitou hodnotu

$$S_z(z,t) = E_x(z,t) \cdot H_y(z,t)$$

Okamžitý výkon nemá moc velký význam, pro další úvahy je lepší jej rozdělit na část, která má střední hodnotu (činný výkon), ta je ekvivalentní s činným výkonem v elektrických obvodech, podílí se i na krytí ztrát. Druhá část, která střední hodnotu nemá, je ekvivalentní jalovému výkonu v elektrických obvodech, podílí se na časových změnách energie elektrického a magnetického pole.

Zapíšeme-li vztah pro okamžitý výkon například v bodě z=0 a pro jednoduchost budeme předpokládat nulovou velikost počátečního fázového posunu, který udává úhel φ_0, bude pro okamžitou hodnotu výkonu platit

$$S_z(z=0,t) = E_x(z=0,t)\cdot H_y(z=0,t)$$

$$S_z(z=0,t) = E_m H_m \sin(\omega t)\sin(\omega t-\varphi_z) = E_m H_m(\sin^2(\omega t)\cos(\varphi_z)+\sin(\omega t)\cos(\omega t)\sin(\varphi_z)) =$$

$$= E_m H_m\left[\frac{1-\cos(2\omega t}{2}\cos(\varphi_z)+\frac{\sin(2\omega t)}{2}\sin(\varphi_z)\right]$$

Vypočteme-li střední hodnotu tohoto výkonu, bude platit

$$S_{st\check{r}}(z=0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_z(z=0,t)\,\mathrm{d}t = \frac{E_m H_m}{2}\cos(\varphi_z).$$

$$S_{st\check{r}}(z) = \frac{1}{2}E_m e^{-\alpha z} H_m e^{-\alpha z}\cos(\varphi_z) = \frac{1}{2}E_m H_m e^{-2\alpha z}\cos(\varphi_z)$$

Zcela analogicky jako v elektrických obvodech, kde je možné velikost činného i jalového výkonu vyjádřit ekvivalentním vztahem pomocí fázorů, je toto možné i u rovinné vlny. Pro správný fyzikální význam tohoto součinu musí být jedna z veličin komplexně sdružená.

$$S_{st\check{r}}(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{E_x}(z)\cdot\mathbf{H_y}(z)^*\right]$$

O tom, že se jedná skutečně o ekvivalentní vztah, je možné se snadno přesvědčit po dosazení

$$S_{st\check{r}}(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{E_x}(z)\cdot\mathbf{H_y}(z)^*\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[E_m e^{\mathrm{j}\varphi_0} e^{\mathrm{j}(\beta-\mathrm{j}\alpha)z}\left(H_m e^{\mathrm{j}(\varphi_0-\varphi_z)} e^{\mathrm{j}(\beta-\mathrm{j}\alpha)z}\right)^*\right] =$$

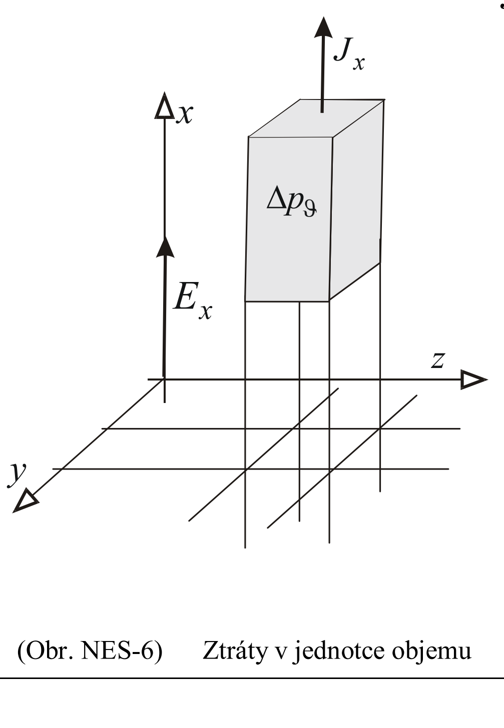
$$= \frac{1}{2}E_m H_m e^{-2\alpha z}\cdot\mathrm{Re}\left[e^{\mathrm{j}\varphi_z}\right] = \frac{1}{2}E_m H_m e^{-2\alpha z}\cos(\varphi_z)$$

{Př. NES/4} Výkon přeměněný v jednotce objemu na teplo

Jak velký výkon se při průchodu rovinné harmonické elektromagnetické vlny vodivým prostředím přemění v teplo?

Prochází-li rovinná elektromagnetická vlna vodivým prostředím, vyvolá nenulová hodnota intenzity elektrického pole elektrický proud ve stejném směru jako je intenzita elektrického pole, v našem případě ve směru osy $\boldsymbol{x}$. Proudová hustota bude podle Ohmova zákona

$$\boldsymbol{J} = \sigma\cdot\boldsymbol{E}$$



(Obr. NES-6) Ztráty v jednotce objemu

Podle Jouleova zákona je výkon, který se v jednotce objemu přeměňuje v teplo, dán vztahem

$$\Delta p_\vartheta = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E} = \sigma\cdot E^2$$

Tento vztah by doslova platil pro stejnosměrné nebo efektivní hodnoty veličin . V případě rovinné vlny jsou všechny veličiny vyjádřeny pomocí amplitud a platí

$$\Delta p_\vartheta = \sigma\, E_{ef}{}^2 = \frac{1}{2}\sigma\, E_m{}^2$$

Amplituda veličin se navíc tlumí při postupu ve směru osy **z** s členem

$$e^{-\alpha z}$$

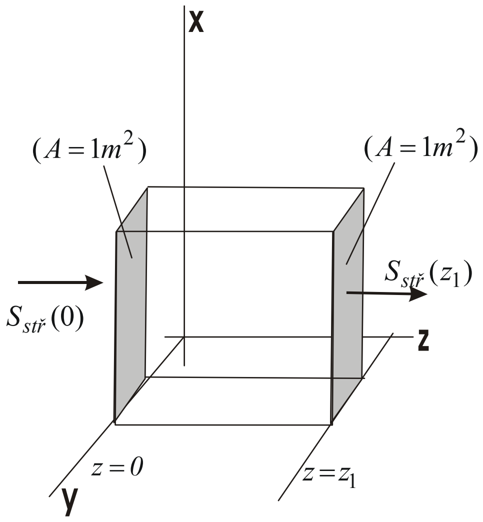
předchozí vztah tedy platí pouze pro bod z=0, v obecném bodě by platilo s ohledem na druhou mocninu intenzity elektrického pole

$$\Delta p_\vartheta(z) = \frac{1}{2}\sigma.E_m{}^2 e^{-2\alpha z} \qquad \text{(NES*12)}$$

{Př. NES/5} Bilance činného výkonu u rovinné vlny

Ukažme, že platí bilance činného výkonu v uzavřeném prostoru, kterým prochází rovinná harmonická elektromagnetická vlna.

Navazuje na
{Př. NES/3} Činný výkon přenášený rovinnou vlnou - střední hodnota Poyntingova vektoru
{Př. NES/4} Výkon přeměněný v jednotce objemu na teplo



(Obr. NES-7) Bilance činného výkonu

Zvolíme uzavřený prostor vymezený hranolem podle obrázku (Obr. NES-7) tak, že jsou jeho čelní stěny s jednotkovou plochou v rovinách rovnoběžných s osou ***x*** a ***y***. Levá stěna je na souřadnici z=0. Pravá stěna je na souřadnici z=z_1. Jeho boční stěny jsou rovnoběžné s osou ***z***.

Výkon může vstoupit a vystoupit do tohoto prostoru s ohledem na směr šíření pouze čelními stěnami. Vlevo vstoupí výkon se střední hodnotou

$$S_{stř}(z=0) = \frac{1}{2} E_m H_m \cos(\varphi_z)$$

na druhé straně vystoupí výkon se střední hodnotou

$$S_{stř}(z=z_1) = \frac{1}{2} E_m H_m e^{-2\alpha z_1} \cos(\varphi_z)$$

Mělo by platit, že rozdíl středních hodnot Poyntingových vektorů

$$S_{stř}(z=0) - S_{stř}(z=z_1) = \frac{1}{2} E_m H_m \left(1 - e^{-2\alpha z_1}\right)\cos(\varphi_z) = \frac{1}{2}\frac{E_m^{\;2}}{|\mathbf{Z}|}\left(1 - e^{-2\alpha z_1}\right)\cos(\varphi_z) \qquad \text{(NES*13)}$$

je právě roven výkonu v objemu vytýčeného kvádru, který se přemění v teplo.

Ke stejnému ztrátovému výkonu musíme dospět integrací objemové hustoty ztrát podle (NES*12) , získáme tak celkové ztráty v kvádru

$$\Delta P_\vartheta = \iiint_V \Delta p_\vartheta \, \mathrm{d}V = (A = 1m^2) \cdot \int_{z=0}^{z1} \Delta p_\vartheta(z) \, \mathrm{d}\,z = \frac{1}{2}\int_{z=0}^{z1} \sigma \cdot E_m^{\;2} e^{-2\alpha z} \, \mathrm{d}\,z = \frac{\sigma E_m^{\;2}}{4\alpha}\left[1 - e^{-2\alpha z_1}\right] \qquad \text{(NES*14)}$$

Hodnoty počítané podle rovnice (NES*13) i (NES*14) by měly být ekvivalentní. Srovnáním rovnic vyplyne, že musí platit

$$\frac{\sigma}{4\alpha} \overset{!}{=} \frac{1}{2}\frac{\cos(\varphi_z)}{|\mathbf{Z}|} \qquad \text{(NES*15)}$$

Z úpravy pravé strany vztahu (NES*15) vyplyne, že to skutečně stejné je

$$\frac{1}{2}\frac{\cos(\varphi_z)}{|\mathbf{Z}|} = \frac{1}{2}\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\omega\mu} = \frac{1}{2}\frac{\beta}{\omega\mu} = \frac{\sigma}{4\alpha}$$

Do vztahu bylo dosazeno pomocí této ekvivalentní rovnice

$$\mathbf{k}^2 = -\mathrm{j}\omega\mu(\mathrm{j}\omega\varepsilon + \sigma) = (\beta - \mathrm{j}\alpha)^2 = \beta^2 - \alpha^2 - 2\,\mathrm{j}\alpha\beta$$
$$\omega\mu\sigma = 2\alpha\beta$$

NES-d Chování elektromagnetické vlny v dobře vodivém a nevodivém prostředí, číselné příklady

{Př. NES/6} Konstanta šíření v dobře vodivém a nevodivém prostředí

Jak veliká bude konstanta šíření a její složky v dobře vodivém a nevodivém prostředí?

Pro konstantu šíření, která obsahuje měrný útlum a fázovou konstantu, platí obecný vztah:

$$\mathbf{k} = \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\,(\mathrm{j}\omega\varepsilon + \sigma)} = \beta - \mathrm{j}\alpha$$

Tato rovnice je analyticky řešitelná. Srovnáním reálných a imaginárních částí v definičním vztahu vyplyne pro činitel útlumu a fázovou konstantu vztah

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}\right]}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}\right]}$$

Pro studium rovinné elektromagnetické vlny je však užitečné posuzovat vlastnosti konstanty šíření přímo z definičního vztahu. Chování elektromagnetické vlny zásadně ovlivňuje vzájemný vztah mezi měrnou vodivostí **σ** a členem **ω.ε**, který se vyskytuje ve zobecněném Ampérově zákoně celkového proudu na stejné pozici jako vodivost. Představuje pomyslnou vodivost pro takzvaný posuvný proud.

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \sigma\,\boldsymbol{E} + \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = (\sigma + \mathrm{j}\omega\varepsilon)\mathbf{E}$$

Platí-li: $\omega\varepsilon >> \sigma$	Platí-li: $\omega\varepsilon << \sigma$
Potom se prostředí chová z hlediska šíření elektromagnetické vlny jako **nevodivé,** říkáme že se vlna šíří v **nevodiči - dielektriku**	Potom se prostředí chová z hlediska šíření elektromagnetické vlny jako **dobře vodivé,** říkáme, že se vlna šíří **ve vodiči**

Pro konstantu šíření bude v těchto speciálních případech platit

$$\mathbf{k} = \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\,(\mathrm{j}\omega\varepsilon + \underbrace{\sigma}_{0})} = \beta - \mathrm{j}\alpha$$

Konstanta šíření má pouze reálnou část, z toho vyplývá, že měrný útlum je nulový, vlna se netlumí

$$\alpha = 0$$

Pro fázovou konstantu platí jednoduchý vztah

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}$$

do kterého je doplněna další konstanta, kterou je rychlost světla

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 3.10^8\,m/s$$

$$\mathbf{k} = \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\,(\underbrace{\mathrm{j}\omega\varepsilon}_{0} + \sigma)} = \beta - \mathrm{j}\alpha$$

$$\mathbf{k} = \frac{1-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma} = \beta - \mathrm{j}\alpha$$

Pro konstantu šíření v dobrém vodiči platí, že má stejně velikou reálnou a imaginární část. Měrný útlum a konstanta šíření je stejně veliká.

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

Pro elektromagnetickou vlnu ve vzduchu nebo vakuu platí

$$\varepsilon_r = 1$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{\omega}{c}$$

{Př. NES/7} Výpočet konstanty šíření (fázová konstanta, měrný útlum) - číselný příklad

Rovinná harmonická elektromagnetická vlna o kmitočtu : a) f = 100 kHz b) f=10 MHz c) f=1 GHz se šíří v prostředí s těmito parametry σ=0.01 S/m, ε_r=18 , μ_r=1. Jak veliká bude konstanta šíření pro všechny alternativy?

Navazuje na
{Př. NES/6} Konstanta šíření v dobře vodivém a nevodivém prostředí

Cílem tohoto příkladu je ukázat, že kromě materiálových vlastností je kmitočet jeden ze základních parametrů, na kterém záleží, jestli se vlna bude chovat jako v obecném, dobře vodivém nebo nevodivém prostředí.

Varianta a)	Varianta b)	Varianta c)
	Kmitočet a úhlová frekvence	
$f = 10^5\,Hz = 100\,kHz$ $\omega = 2\pi.f = 6.283E+5\ rad/s$	$f = 10^7\,Hz = 10\,MHz$ $\omega = 2\pi.f = 6.283E+7\ rad/s$	$f = 10^9\,Hz = 1\,GHz$ $\omega = 2\pi.f = 6.283E+9\ rad/s$
	Měrná vodivost prostředí	
$\sigma = 0.01\,S/m$	$\sigma = 0.01\,S/m$	$\sigma = 0.01\,S/m$
	Permitivita prostředí	
$\varepsilon_r = 18$ $\varepsilon_0 = \frac{1}{36.\pi}\cdot 10^{-9}$ $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$	$\varepsilon_r = 18$ $\varepsilon_0 = \frac{1}{36.\pi}\cdot 10^{-9}$ $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$	$\varepsilon_r = 18$ $\varepsilon_0 = \frac{1}{36.\pi}\cdot 10^{-9}$ $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$
	Permeabilita prostředí	
$\mu_r = 1$ $\mu_0 = 4.\pi\cdot 10^{-7}$ $\mu = \mu_0\mu_r$	$\mu_r = 1$ $\mu_0 = 4.\pi\cdot 10^{-7}$ $\mu = \mu_0\mu_r$	$\mu_r = 1$ $\mu_0 = 4.\pi\cdot 10^{-7}$ $\mu = \mu_0\mu_r$

S ohledem na poměr $\frac{\omega.\varepsilon}{\sigma}$

lze posoudit, zda se prostředí bude chovat pro daný kmitočet jako vodivé nebo nevodivé

$\frac{\omega.\varepsilon}{\sigma} = 0.01$	$\frac{\omega.\varepsilon}{\sigma} = 1$	$\frac{\omega.\varepsilon}{\sigma} = 100$
$\omega.\varepsilon << \sigma$ prostředí se bude chovat jako **vodivé**	$\omega\varepsilon \approx \sigma$ **obecné** prostředí	$\omega\varepsilon >> \sigma$ prostředí se bude chovat jako **nevodivé**

Pro konstantu šíření platí obecně: $\mathbf{k} = \beta - \mathrm{j}\alpha = \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu(\mathrm{j}\omega\varepsilon + \sigma)}$

β je fázová konstanta α je měrný útlum

Při výpočtu konstanty šíření je třeba postupně vyčíslit jednotlivé části vztahu. Postupným dosazením za jednotlivé parametry prostředí dostaneme

$$\boldsymbol{k^2} = -\mathrm{j}\omega\mu(\mathrm{j}\omega\varepsilon + \sigma)$$

$k^2 = 7.896.10^{-5} - \mathrm{j}7.896.10^{-3}$	$k^2 = 7.896.10^{-1} - \mathrm{j}7.896.10^{-1}$	$k^2 = 7.896.10^{3} - \mathrm{j}7.896.10^{1}$

Aby bylo možno komplexní číslo odmocnit,je třeba ho převést do polárního tvaru:

$\lvert k^2 \rvert = 7.896.10^{-3}$	$\lvert k^2 \rvert = 1.117$	$\lvert k^2 \rvert = 7.896.10^{3}$
$\arg\lvert k^2 \rvert = -1.561$	$\arg\lvert k^2 \rvert = -0.785$	$\arg\lvert k^2 \rvert = -9.985.10^{-3}$

Po odmocnění

$\lvert k \rvert = 8.886.10^{-2}$	$\lvert k \rvert = 1.057$	$\lvert k \rvert = 88.925$
$\arg\lvert k \rvert = -0.78$	$\arg\lvert k \rvert = -0.392$	$\arg\lvert k \rvert = -4.992.10^{-3}$

Po převedení zpět do kartézského tvaru: $k = \beta - \mathrm{j}\alpha$

$\alpha = 6.252.10^{-2}$	$\alpha = 0.404$	$\alpha = 0.4439$
$\beta = 6.315.10^{-2}$	$\beta = 0.977$	$\beta = 88.924$

Pro výpočet konstanty šíření existuje i analytické řešení, po dosazení musíme dostat stejné výsledky

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}\right]} \qquad \alpha = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left[-1+\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}\right]}$$

S ohledem na chování vlny lze vztahy zjednodušit

Při výpočtu konstanty šíření ve vodiči

$$\omega.\varepsilon << \sigma$$

$$k = \beta - \mathrm{j}\alpha =$$

$$= \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\sigma} = (1-\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$\alpha = \beta = 6.283.10^{-2}$$

Při výpočtu konstanty šíření v dielektriku, kde platí

$$\omega\varepsilon >> \sigma$$

$$k = \beta - \mathrm{j}\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \approx 3.10^8 \, m/s$$

$$\beta = 88.923$$

Výsledky zjednodušených výpočtů se liší jen málo od přesných hodnot. O tom, zda je některé prostředí více vodivé z hlediska šíření rovinné vlny nelze usuzovat na základě absolutní hodnoty činitele útlumu. Musí se posuzovat, jak se vlna tlumí na vzdálenosti ve vztahu k vlnové délce.

{Př. NES/8} Vlnová délka, fázová rychlost, hloubka vniku

Rovinná harmonická elektromagnetická vlna o kmitočtu : a) f = 100 kHz b) f=10 MHz c) f=1GHz se šíří v prostředí s těmito parametry σ=0.01 S/m, ε_r=18 , μ_r=1.

Co je vlnová délka, fázová rychlost a hloubka vniku? Jakou mají velikost v prostředí se zadanými parametry pro dané kmitočty?

Navazuje na

{Př. NES/7} Výpočet konstanty šíření (fázová konstanta, měrný útlum) - číselný příklad

Varianta a)	Varianta b)	Varianta c)
$f = 10^5\,Hz = 100\,kHz$	$f = 10^7\,Hz = 10\,MHz$	$f = 10^9\,Hz = 1\,GHz$
$\frac{\omega.\varepsilon}{\sigma} = 0.01$	$\frac{\omega.\varepsilon}{\sigma} = 1$	$\frac{\omega.\varepsilon}{\sigma} = 100$
vodivé prostředí	obecné prostředí	nevodivé prostředí

Fázová konstanta a měrný útlum vypočtený v příkladu {Př. NES/7}

$\alpha = 6.252.10^{-2}$	$\alpha = 0.404$	$\alpha = 0.4439$
$\beta = 6.315.10^{-2}$	$\beta = 0.977$	$\beta = 88.924$

Vlnová délka je nejbližší vzdálenost dvou míst, ve kterých kmitají veličiny pole se stejnou fází. Pro vlnovou délku platí zcela obecně

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 99.501\, m$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 6{,}433\, m$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 7{,}066.10^{-2}\ m$$

V nevodivém prostředí kde platí

$$\omega\varepsilon >> \sigma$$

lze s dostatečnou předností počítat

$$\lambda = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{f}\sqrt{\varepsilon_r}$$

Fázová rychlost je rychlost, s jakou se pomyslně pohybují místa se stejnou fází, rovinné vlnoplochy.Pro fázovou rychlost obecně platí

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = 9{,}95.10^{6}\ m/s$$

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = 6{,}433.10^{7}\ m/s$$

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = 7{,}066.10^{7}\ m/s$$

Pro nevodivý materiál se vztahy zjednoduší

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} =$$

$$= 7{,}066.10^{7}\ m/s$$

Hloubka vniku je konstanta, která charakterizuje pronikání vlny do vodivého prostoru. Je to vzdálenost, na které se amplituda veličin utlumí e^{-1} x. Pro hloubku vniku platí obecně

$$\delta = \frac{1}{\alpha}$$

$$\delta = 15{,}9 m$$

$$\delta = 2{,}474 m$$

$$\delta = 2{,}252 m$$

V tomto případě nelze útlum zanedbat, jinak by byla hloubka vniku nekonečná, vlna by se netlumila

Proč se některé prostředí jeví jako vodivé a jiné nevodivé je dobře vidět na srovnání hloubky vniku s vlnovou délkou. Vypočítat tedy poměrnou vzdálenost ve vztahu k vlnové délce, na které se vlna utlumí e^{-1} x

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{15{,}9}{99.5} = 0.16$$

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{2.47}{6.43} = 0.38$$

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{2.25}{7.07 \cdot 10^{-2}} = 31.8$$

{Př. NES/9} Vlnová impedance v dobře vodivém a nevodivém prostředí

Jak veliká je vlnová impedance v nevodivém a dobře vodivém prostředí?

Navazuje na

{Př. NES/2} Intenzita magnetického pole u rovinné elektromagnetické vlny

Vlnová impedance je veličina, která udává vzájemný vztah mezi fázorem intenzity elektrického a magnetického pole. Absolutní hodnota vlnové impedance udává podíl amplitud intenzit, argument vlnové impedance představuje fázový posun mezi vektorem intenzity elektrického a magnetického pole. Vlnová impedance je závislá na parametrech prostředí a platí pro ní vztah, který vyplyne při odvození

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{E_x}}{\mathbf{H_y}} = \frac{\omega\mu}{\mathbf{k}}$$

Po dosazení za konstantu šíření platí vztah

$$\mathbf{Z}=\frac{\omega\mu}{\mathbf{k}}=\frac{\omega\mu}{-\,\mathrm{j}\omega\,\mu(\mathrm{j}\omega\varepsilon+\sigma)}=\sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\mathrm{j}\omega\varepsilon+\sigma)}}$$

Podle stejných předpokladů jako v příkladu {Př. NES/6} lze klasifikovat prostředí z hlediska vzájemného poměru vodivosti **σ** a členu **ω.ε** na dobře vodivé a nevodivé.

Nevodivé prostředí

$$\omega\varepsilon >> \sigma$$

$$\mathbf{Z}=|\mathbf{Z}|e^{\mathrm{j}\varphi_z}=\sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\mathrm{j}\omega\varepsilon+\underbrace{\sigma}_{0})}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Vlnová impedance je reálná, pro absolutní hodnotu vlnové impedance platí vztah

$$|\mathbf{Z}|=\frac{E_m}{H_m}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}=\frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

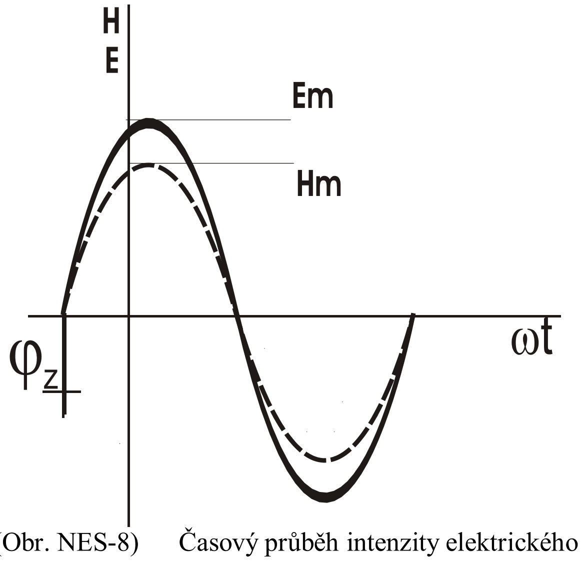
Fázový posun mezi E a H je nulový, intenzita elektrického a magnetického pole je ve fázi

$$\varphi_z=0$$

Pro vlnovou impedanci ve vzduchu nebo dielektriku je možné vztah ještě upravit

$$\varepsilon_r=1$$

$$|\mathbf{Z}|=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}=\frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$



(Obr. NES-8) Časový průběh intenzity elektrického a magnetického pole v nevodivém prostředí

Dobře vodivé prostředí

$$\omega\varepsilon << \sigma$$

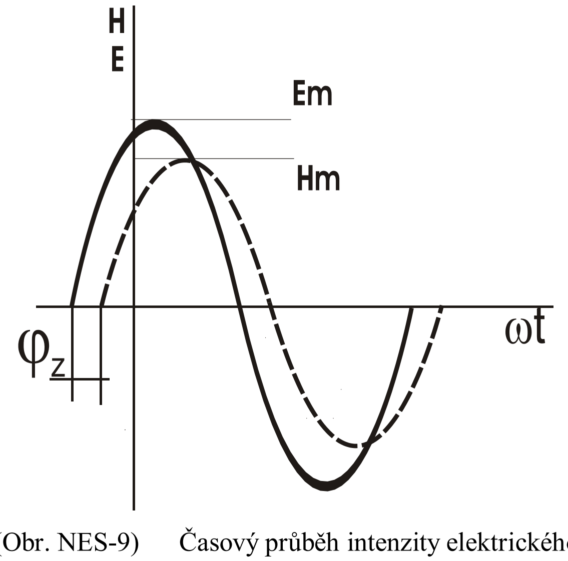
$$\mathbf{Z}=|\mathbf{Z}|e^{\mathrm{j}\varphi_z}=\sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\underbrace{\mathrm{j}\omega\varepsilon}_{0}+\sigma)}}=\sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\sigma}}=\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$$

Pro absolutní hodnotu vlnové impedance platí vztah

$$|\mathbf{Z}|=\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}$$

Fázový posun mezi E a H je π/4, intenzita elektrického pole E tedy předbíhá intenzitu magnetického pole o 45°.

$$\varphi_z=\frac{\pi}{4}$$



(Obr. NES-9) Časový průběh intenzity elektrického a magnetického pole v dobře vodivém prostředí

{Př. NES/10} Vlnová impedance prostředí - číselný příklad

Rovinná harmonická elektromagnetická vlna o kmitočtu : a) f = 100 kHz b) f=10 MHz c) f=1GHz se šíří v prostředí s těmito parametry σ=0.01 S/m, ε_r=18 , μ_r=1.
Jak veliká bude vlnová impedance pro vlnu šířící se v zadaném prostředí pro dané kmitočty?

Navazuje na
{Př. NES/7} Výpočet konstanty šíření (fázová konstanta, měrný útlum) - číselný příklad
{Př. NES/9} Vlnová impedance v dobře vodivém a nevodivém prostředí

Varianta a)	Varianta b)	Varianta c)
$f=10^5\,Hz=100\,kHz$	$f=10^7\,Hz=10\,MHz$	$f=10^9\,Hz=1\,GHz$
$\frac{\omega.\varepsilon}{\sigma}=0.01$	$\frac{\omega.\varepsilon}{\sigma}=1$	$\frac{\omega.\varepsilon}{\sigma}=100$

vodivé prostředí	obecné prostředí	nevodivé prostředí

Pro vlnovou impedanci platí obecně vztah: $Z = \dfrac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{j}\omega\mu}{\mathrm{j}\omega\varepsilon + \sigma}} = |Z| \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_z}$

$Z = \|Z\| \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_z} = 8{,}886 e^{\mathrm{j}0{,}785}$	$Z = \|Z\| \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_z} = 74{,}693.e^{\mathrm{j}0{,}392}$	$Z = \|Z\| \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_z} = 88{,}79.e^{\mathrm{j}0{,}0049}$

Máme-li již vypočtenou konstantu šíření z předchozího výpočtu, je vhodnější vycházet ze vztahu:

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\omega\mu}{\boldsymbol{k}} = |\boldsymbol{Z}| \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_z}$$

$\|\boldsymbol{k}\| = 8.886.10^{-2}$	$\|\boldsymbol{k}\| = 1.057$	$\|\boldsymbol{k}\| = 88.925$
$\arg\|\boldsymbol{k}\| = -0.78$	$\arg\|\boldsymbol{k}\| = -0.392$	$\arg\|\boldsymbol{k}\| = -4.992.10^{-3}$
Ve vodiči pro $\omega.\varepsilon \ll \sigma$		V dielektriku pro $\omega\varepsilon \gg \sigma$
lze provést toto zjednodušení		lze provést toto zjednodušení:
$Z = \dfrac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{j}\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\dfrac{\omega\mu}{\sigma}} \cdot e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}} = \|Z\| \cdot e^{\mathrm{j}}$		$Z = \dfrac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{j}\omega\mu}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} = \|Z\| \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_z}$
$\|Z\| = \sqrt{\dfrac{\omega\mu}{\sigma}} = 8{,}886\Omega$	$\|Z\| = 74{,}693\Omega$	$\|Z\| = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \dfrac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 88{,}79$
$\varphi_z = \dfrac{\pi}{4}\,rad[45°]$	$\varphi_z = 0{,}392\,rad[22{,}5°]$	$\varphi_z = 0$
E předbíhá H o 45 stupňů	E předbíhá H o 22,5 stupně	E a H je ve fázi

Hodnoty impedance získané ze zjednodušených vztahů pro vodič a nevodič se liší pouze nepatrně od přesných hodnot.

{Př. NES/11} Časové průběhy veličin E a H (okamžité hodnoty E a H v libovolném čase a místě)

Rovinná harmonická elektromagnetická vlna o kmitočtu : a) f = 100 kHz b) f=10 MHz c) f=1GHz se šíří v prostředí s těmito parametry σ=0.01 S/m, ε_r=18 , μ_r=1. Jaké vztahy platí pro obecný časový průběh intenzity elektrického a magnetického pole v libovolném bodě, je-li zadán průběh intenzity elektrického pole v bodě z=0 : $E_x(z=0,t) = 46{,}6\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Navazuje na
{Př. NES/7} Výpočet konstanty šíření (fázová konstanta, měrný útlum) - číselný příklad
{Př. NES/9} Vlnová impedance v dobře vodivém a nevodivém prostředí
{Př. NES/10} Vlnová impedance prostředí

Pro stanovení hodnoty veličin elektromagnetického pole v libovolném místě, musíme znát hodnoty v jednom místě(okrajová podmínka). V našem případě je zadán průběh intenzity elektrického pole v bodě z=0.

Pro časové průběhy intenzity elektrického a magnetického pole platí obecně

$$E_x(z,t) = E_m\, \mathrm{e}^{-\alpha.z} \sin(\omega t - \beta.z + \varphi_0) \qquad H_y(z,t) = H_m\, \mathrm{e}^{-\alpha.z} \sin(\omega t - \beta.z - \varphi_z + \varphi_0)$$

Aby bylo možno konkrétně stanovit časový průběh veličin v libovolném místě, respektive stanovit okamžitou hodnotu veličin v libovolném čase a libovolném místě, je třeba stanovit všechny parametry ve výše uvedených rovnicích.

Amplitudu intenzity elektrického pole a fázový posun této veličiny v bodě z=0 je možno určit ze zadané okrajové podmínky:

$$E_x(z=0,t) = E_m \sin(\varphi_0) = 46{,}6.\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Z toho vyplývá

$$E_m = 46{,}6\, V/m \qquad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Varianta a)	Varianta b)	Varianta c)
$f = 10^5\,Hz = 100\,kHz$	$f = 10^7\,Hz = 10\,MHz$	$f = 10^9\,Hz = 1\,GHz$

Fázová konstanta a měrný útlum byly určeny v {Př. NES/7}

$\alpha = 6.252.10^{-2}$	$\alpha = 0.404$	$\alpha = 0.4439$
$\beta = 6.315.10^{-2}$	$\beta = 0.977$	$\beta = 88.924$

Pro stanovení všech parametrů pro výpočet intenzity magnetického pole je třeba použít vlnovou impedanci, která byla pro stejné zadané hodnoty vypočtena v příkladu {Př. NES/10}

$\lvert Z\rvert = 8{,}886\Omega$	$\lvert Z\rvert = 74{,}693\Omega$	$\lvert Z\rvert = 88{,}79\Omega$
$\varphi_z = \frac{\pi}{4} rad[45°]$	$\varphi_z = 0{,}392 rad[22{,}5°]$	$\varphi_z = 0{,}0049$

Amplituda intenzity magnetického pole se stanoví obecně podle vztahu:

$$H_m = \frac{E_m}{\lvert Z\rvert}$$

$H_m = 5{,}244\ A/m$	$H_m = 0{,}624\ A/m$	$H_m = 0{,}525\ A/m$

Nyní známe v rovnicích pro časové průběhy veličiny E a H všechny parametry, dosazením je možno snadno vypočítat okamžitou hodnotu E i H v libovolném čase **t** a místě **z**.

{Př. NES/12} Fázory veličin E a H

Rovinná harmonická elektromagnetická vlna o kmitočtu : a) f = 100 kHz b) f=10 MHz c) f=1GHz se šíří v prostředí s těmito parametry σ=0.01 S/m, ε_r=18 , μ_r=1.

Je zadán průběh intenzity elektrického pole v bodě z=0 $E_x(z=0,t) = 46{,}6\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

Jak vypadají fázory veličin v zadaném prostředí a pro dané kmitočty?

Navazuje na
{Př. NES/7} Výpočet konstanty šíření (fázová konstanta, měrný útlum) - číselný příklad
{Př. NES/9} Vlnová impedance v dobře vodivém a nevodivém prostředí
{Př. NES/10} Vlnová impedance prostředí

Pro fázory veličin elektromagnetického pole platí obecně:
Fázor intenzity elektrického pole

$$\mathbf{E_x}(z) = \mathbf{E_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\mathbf{k}z} = \underbrace{E_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_0}}_{\mathbf{E_0}}\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta-\mathrm{j}\alpha)z}}_{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\mathbf{k}z}}$$

Fázor intenzity elektrického pole v bodě z=0

$$\mathbf{E_x}(z=0) = \mathbf{E_0} = E_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_0}$$

Fázor intenzity magnetického pole:

$$\mathbf{H_y}(z) = \mathbf{H_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\mathbf{k}z} = \underbrace{H_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_0-\varphi_z)}}_{\mathbf{H_0}}\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta-\mathrm{j}\alpha)z}}_{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\mathbf{k}z}}$$

Fázor intenzity magnetického pole v bodě z=0

$$\mathbf{H_y}(z=0) = \mathbf{H_0} = H_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_0-\varphi_z)}$$

Fázory intenzity elektrického a magnetického pole jsou vázány vlnovou impedancí

$$\mathbf{Z} = \lvert\mathbf{Z}\rvert\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_z} = \frac{\mathbf{E_x}(z)}{\mathbf{H_y}(z)} = \frac{\mathbf{E_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\mathbf{k}z}}{\mathbf{H_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\mathbf{k}z}} = \frac{E_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta-\mathrm{j}\alpha)z}}{H_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_0-\varphi_z)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta-\mathrm{j}\alpha)z}} = \frac{E_m}{H_m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_z}$$

$$\lvert\mathbf{Z}\rvert = \frac{E_m}{H_m}$$

Aby bylo možno konkrétně stanovit fázory veličin v libovolném místě, je třeba stanovit všechny parametry ve výše uvedených rovnicích. Amplitudu intenzity elektrického pole a fázový posun této veličiny v bodě z=0 je možno určit ze zadané podmínky:

$$E_x(z=0,t) = E_m \sin(\varphi_0) = 46{,}6.\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Z toho vyplývá :

$$E_m = 46{,}6 V/m$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{E_0} = E_m\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_0}$$

Varianta a)	Varianta b)	Varianta c)
$f = 10^5\,Hz = 100\,kHz$	$f = 10^7\,Hz = 10\,MHz$	$f = 10^9\,Hz = 1\,GHz$
$\mathbf{E_0} = 46.6\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\,V/m$	$\mathbf{E_0} = 46.6\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\,V/m$	$\mathbf{E_0} = 46.6\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\,V/m$

Fázová konstanta a měrný útlum byl vypočten již v {Př. NES/7}

$\alpha = 6.252.10^{-2}$	$\alpha = 0.404$	$\alpha = 0.4439$
$\beta = 6.315.10^{-2}$	$\beta = 0.977$	$\beta = 88.924$

Po dosazení platí pro fázory intenzity elektrického pole vztah:

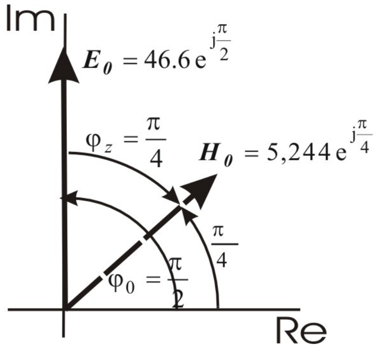
$\mathbf{E_x}(z) = \mathbf{E_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta - \mathrm{j}\alpha)z}$	$\mathbf{E_x}(z) = \mathbf{E_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta - \mathrm{j}\alpha)z}$	$\mathbf{E_x}(z) = \mathbf{E_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta - \mathrm{j}\alpha)z}$

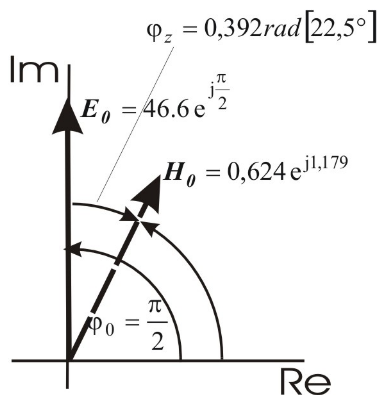
Vlnová impedance $\boldsymbol{Z} = |\boldsymbol{Z}| \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_z}$ byla vypočtena v {Př. NES/10}:

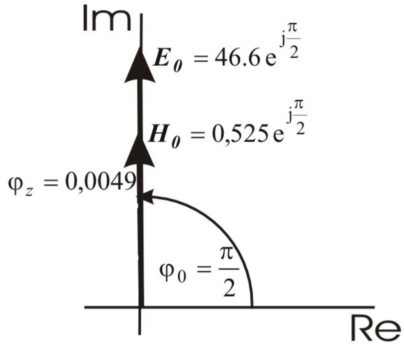
$\mathbf{Z} = \lvert\mathbf{Z}\rvert \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_z} = 8{,}886 e^{\mathrm{j}0{,}785}$	$\mathbf{Z} = \lvert\mathbf{Z}\rvert \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_z} = 74{,}693.e^{\mathrm{j}0{,}392}$	$\mathbf{Z} = \lvert\mathbf{Z}\rvert \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_z} = 88{,}79.e^{\mathrm{j}0{,}0049}$

Po dosazení platí pro fázory intenzity magnetického pole vztahy:

$\mathbf{H_0} = \dfrac{\mathbf{E_0}}{\mathbf{Z}} = \dfrac{46.6\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}}{8{,}886 e^{\mathrm{j}0{,}785}} = 5{,}244\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}}$	$\mathbf{H_0} = \dfrac{\mathbf{E_0}}{\mathbf{Z}} = \dfrac{46.6\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}}{74{,}693.e^{\mathrm{j}0{,}392}} = 0{,}624\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}1{,}1}$	$\mathbf{H_0} = \dfrac{\mathbf{E_0}}{\mathbf{Z}} = \dfrac{46.6\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}}{88{,}79.e^{\mathrm{j}0{,}0049}} = 0{,}525\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}}$
$\mathbf{H_y}(z) = \mathbf{H_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta - \mathrm{j}\alpha)z}$	$\mathbf{H_y}(z) = \mathbf{H_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta - \mathrm{j}\alpha)z}$	$\mathbf{H_y}(z) = \mathbf{H_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta - \mathrm{j}\alpha)z}$







{Př. NES/13} Střední hodnota Poyntingova vektoru, bilance výkonu

Rovinná harmonická elektromagnetická vlna o kmitočtu : a) f = 100 kHz b) f=10 MHz c) f=1GHz se šíří v prostředí s těmito parametry σ=0.01 S/m, ε_r=18 , μ_r=1.

Je zadán průběh intenzity elektrického pole v bodě z=0 $E_x(z=0,t) = 46{,}6\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

Jak veliká je střední hodnota Poyntingova vektoru v bodě z=0 a z=λ/4,
objemová hustota ztrát v bodě z=0,
bilance výkonů a ztrát v kvádru o podstavě 1m2 a délce hrany λ/4 ?

Navazuje na
{Př. NES/3} Činný výkon přenášený rovinnou vlnou - střední hodnota Poyntingova vektoru
{Př. NES/5} Bilance činného výkonu u rovinné vlny
{Př. NES/7} Výpočet konstanty šíření (fázová konstanta, měrný útlum) - číselný příklad
{Př. NES/8} Vlnová délka, fázová rychlost, hloubka vniku
{Př. NES/9} Vlnová impedance v dobře vodivém a nevodivém prostředí
{Př. NES/10} Vlnová impedance prostředí
{Př. NES/11} Časové průběhy veličin E a H (okamžité hodnoty E a H v libovolném čase a místě)

Varianta a)	Varianta b)	Varianta c)
$f = 10^5\,Hz = 100\,kHz$	$f = 10^7\,Hz = 10\,MHz$	$f = 10^9\,Hz = 1\,GHz$

Střední hodnota Poyntingova vektoru (výkon, který projde v určitém místě plochou o velikosti 1m², která je kolmá na směr šíření):

$$S_{stř}(z) = \frac{1}{2}E_m H_m\,\mathrm{e}^{-2\alpha\cdot z}\cos(\varphi_z) = \frac{1}{2}\frac{E_m{}^2}{|\mathbf{Z}|}\mathrm{e}^{-2\alpha\cdot z}\cos(\varphi_z) = \frac{1}{2}H_m{}^2|\mathbf{Z}|\,\mathrm{e}^{-2\alpha\cdot z}\cos(\varphi_z)$$

Střední hodnotu Poyntingova vektoru lze vyjádřit rovněž pomocí fázorů veličin, výsledek musí být ekvivalentní:

$$S_{stř}(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}(z)\mathbf{H}(z)^*\right]$$

Měrný útlum byl vypočten v příkladě {Př. NES/7}

$\alpha = 6.252.10^{-2}$	$\alpha = 0.404$	$\alpha = 0.4439$

Fázový posun E a H byl vypočten v příkladu {Př. NES/10}

$\varphi_z = \frac{\pi}{4}rad[45°]$	$\varphi_z = 0{,}392rad[22{,}5°]$	$\varphi_z = 0{,}0049$

Amplituda intenzity elektrického pole podle příkladu {Př. NES/11}:

$E_m = 46{,}6\,V/m$	$E_m = 46{,}6\,V/m$	$E_m = 46{,}6\,V/m$

Amplituda intenzity magnetického pole podle příkladu {Př. NES/11}:

$H_m = 5{,}244\,A/m$	$H_m = 0{,}624\,A/m$	$H_m = 0{,}525\,A/m$

Střední hodnota Poyntingova vektoru v bodě z=0 $S_{stř}(z=0) = \frac{1}{2}E_m H_m\cos(\varphi_z)$

$S_{stř}(z=0) = 86{,}8W/m^2$	$S_{stř}(z=0) = 13{,}43W/m^2$	$S_{stř}(z=0) = 12{,}23W/m^2$

Vlnová délka vypočtená v příkladu {Př. NES/8}

$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 99.501m$	$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 6{,}433m$	$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 7{,}066.10^{-2}m$

Střední hodnota Poyntingova vektoru v bodě z=λ/4 $S_{stř}(z=\lambda/4) = \frac{1}{2}E_m H_m e^{-\alpha\frac{\lambda}{4}}\cos(\varphi_z)$

$S_{stř}(z=\frac{\lambda}{4})=S_{stř}(z=0)\cdot \mathrm{e}^{-2\alpha\cdot\frac{\lambda}{4}}$	$S_{stř}(z=\frac{\lambda}{4})=S_{stř}(z=0)\cdot \mathrm{e}^{-2\alpha\cdot\frac{\lambda}{4}}$	$S_{stř}(z=\frac{\lambda}{4})=S_{stř}(z=0)\cdot \mathrm{e}^{-2\alpha\cdot\frac{\lambda}{4}}$
$S_{stř}(z=\frac{\lambda}{4})=3.87 \quad W/m^2$	$S_{stř}(z=\frac{\lambda}{4})=3.66 \quad W/m^2$	$S_{stř}(z=\frac{\lambda}{4})=12.038 \quad W/m^2$

Pro zajímavost je dobré se podívat, jak na zadané vzdálenosti poklesly amplitudy veličin a velikost výkonu. Z daného srovnání bude také patrné, proč se chová zadané prostředí pro nejmenší kmitočet jako dobře vodivé a pro největší kmitočet jako nevodivé

Amplituda intenzity elektrického a magnetického pole poklesne na vzdálenosti $z=\frac{\lambda}{4}$

$\mathrm{e}^{-\alpha\cdot\frac{\lambda}{4}}=0{,}211\,\mathrm{x}$	$\mathrm{e}^{-\alpha\cdot\frac{\lambda}{4}}=0.522\,\mathrm{x}$	$\mathrm{e}^{-\alpha\cdot\frac{\lambda}{4}}=0.992\,\mathrm{x}$
poklesne na 21.4 %	poklesne na 52.2 %	poklesne na 99.2 %

Střední hodnota Poyntingova vektoru poklesne na vzdálenosti $z=\frac{\lambda}{4}$

$\mathrm{e}^{-2\alpha\cdot\frac{\lambda}{4}}=0.0446$	$\mathrm{e}^{-2\alpha\cdot\frac{\lambda}{4}}=0.273$	$\mathrm{e}^{-2\alpha\cdot\frac{\lambda}{4}}=0.984$
poklesne na 4.46 %	poklesne na 27.3 %	poklesne na 98.4 %

Rozdíl středních hodnot Poyntingova vektoru by se měl rovnat podle předpokladu výkonu, který se přemění v kvádru o podstavách $1\mathrm{m}^2$ a délce λ/4 na teplo:

$S_{stř}(z=0)-S_{stř}(z=\frac{\lambda}{4})=$	$S_{stř}(z=0)-S_{stř}(z=\frac{\lambda}{4})=$	$S_{stř}(z=0)-S_{stř}(z=\frac{\lambda}{4})=$
$=82.97 \quad W$	$=9.77 \quad W$	$=0.19 \quad W$

O tom, že je to skutečně výkon přeměněný v daném objemu na teplo, je možno se přesvědčit integrací objemové hustoty ztrát.

Výkon, který se přemění v jednotce objemu v teplo (objemová hustota ztrát), se určí obecně podle vztahu (viz {Př. NES/3})

$$\Delta p_{\vartheta}=\frac{1}{2}\sigma\cdot {E_m}^2\cdot \mathrm{e}^{-2\alpha\cdot z}$$

Například objemová hustota ztrát v bodě z=0 má velikost:

$$\Delta p_{\vartheta}(z=0)=\frac{1}{2}\sigma\cdot {E_m}^2$$

$\Delta p_{\vartheta}(z=0)=10.86 \quad W/m^3$	$\Delta p_{\vartheta}(z=0)=10.86 \quad W/m^3$	$\Delta p_{\vartheta}(z=0)=10.86 \quad W/m^3$

Integrací objemové hustoty ztrát v kvádru (viz příklad {Př. NES/5}) o podstavách $1\mathrm{m}^2$ a délce λ/4 dostaneme výkon, který se přemění v tomto kvádru na teplo:

$$\Delta P_{\vartheta}=\frac{\sigma\cdot {E_m}^2}{4\alpha}\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-2\alpha\cdot\frac{\lambda}{4}}\right)$$

$\Delta P_{\vartheta}=82.97 \quad W$	$\Delta P_{\vartheta}=9.77 \quad W$	$\Delta P_{\vartheta}=0.19 \quad W$

Z vypočtených hodnot je patrno, že v daném kvádru skutečně platí

$$\Delta P_{\vartheta}=S_{stř}(z=0)-S_{stř}(z=\lambda)$$

{Př. NES/14} Rovinná harmonická elektromagnetická vlna, číselný příklad

Rovinná harmonická elektromagnetická vlna se šíří v prostředí s parametry **ε_r=6**, **μ_r=2**, **σ=0.02 S/m**. Frekvence vlny je **f=100 MHz**. Vypočtěte: fázovou konstantu **β**, měrný útlum **α**, vlnovou délku **λ** a impedanci prostředí **Z**.

Navazuje na
{Př. NES/6} Konstanta šíření v dobře vodivém a nevodivém prostředí
{Př. NES/8} Vlnová délka, fázová rychlost, hloubka vniku
{Př. NES/9} Vlnová impedance v dobře vodivém a nevodivém prostředí
{Př. NES/10} Vlnová impedance prostředí
{Př. NES/11} Časové průběhy veličin E a H (okamžité hodnoty E a H v libovolném čase a místě)

Konstanty šíření k bude:

$$\boldsymbol{k} = \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\,(\mathrm{j}\omega\varepsilon + \sigma)} = \sqrt{-\mathrm{j}2\pi\cdot 100\cdot 10^{6}\mu_0\cdot 2\,(\mathrm{j}2\pi\cdot 100\cdot 10^{6}\varepsilon_0\cdot 6 + 0.02)} =$$
$$= \beta - j\cdot\alpha = (7.6 - j2.1)\,\mathrm{m}^{-1}$$

Fázová konstanta je tedy

$$\beta = 7.6\ \mathrm{m}^{-1}$$

Měrný útlum

$$\alpha = 2.1\ \mathrm{m}^{-1}$$

Vlnová délka v daném prostředí je pak

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{7.6} = 0.827\mathrm{m}$$

Impedance prostředí **Z**:

$$\mathbf{Z} = \sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\mathrm{j}\omega\varepsilon + \sigma}} = \sqrt{\frac{\mathrm{j}2\pi\cdot 100\cdot 10^{6}\mu_0\cdot 2}{\mathrm{j}2\pi\cdot 100\cdot 10^{6}\cdot\varepsilon_0\cdot 6 + 0.02}} = (194.16 + j53.72)\Omega = 201.45\,\mathrm{e}^{j15.47^\circ}\ \Omega$$

{Př. NES/15} Rovinná harmonická elektromagnetická vlna, číselný příklad

V čase **t=0** a místě **z=0** je amplituda intenzity elektrického pole $E_{xm} = 100e^{j25^\circ}V$. Vlna se šíří ve směru osy **z**. Napište fázorový a časový tvar vlnové rovnice a stanovte **E** a **H** v místě **z=3 m** a čase **t=30 ns**. Parametry prostředí jsou stejné jako v předešlém příkladě.

Navazuje na
{Př. NES/12}Fázory veličin E a H

Fázor intenzity elektrického pole bude mít tvar:

$$\mathbf{E_x}(z) = \mathbf{E_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} = \underbrace{E_m\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_0}}_{\mathrm{E_0}}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} = E_m\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} = 100\,\mathrm{e}^{j25^\circ}\mathrm{e}^{-2.1z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}7.6z}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Fázor intenzity magnetického pole bude mít tvar

$$\mathbf{H}_{\mathrm{y}}(\mathrm{z}) = \frac{\mathbf{E_x}(z)}{\mathbf{Z}} = \frac{E_m}{|\mathbf{Z}|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_Z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_0}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} = E_m\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_0 + j\varphi_Z}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} =$$
$$= \frac{100}{201.45}\mathrm{e}^{j25^\circ + j15.47^\circ}\mathrm{e}^{-2.1z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}7.6z} = 0.496\,\mathrm{e}^{j40.47^\circ}\mathrm{e}^{-2.1z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}7.6z}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

Časový tvar:

$$\mathrm{E_x}(z,t) = E_m\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\sin(\omega t - \beta z + \varphi_0) = 100\,\mathrm{e}^{-2.1z}\sin(2\pi\cdot 100\cdot 10^{6}\,t - 7.6\,z + 25^\circ)\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

$$\mathrm{H_y}(z,t) = \frac{\mathrm{E_x}(z,t)}{|\mathbf{Z}|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_Z}}\mathrm{e}^{-\alpha z}\sin(\omega t - \beta z + \varphi_0) = 0.496\,\mathrm{e}^{-2.1z}\sin(2\pi\cdot 100\cdot 10^{6}\,t - 7.6\,z + 40.47^\circ)\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

Intenzita elektrického pole v místě z=3m, fázorový tvar:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{x}}(\mathrm{z}) = 100\,\mathrm{e}^{j25^\circ}\,\mathrm{e}^{-3\cdot 2.1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\cdot 7.6} = 100\,\mathrm{e}^{j25^\circ}\,\mathrm{e}^{-6.3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}22.8} = 0.184\,\mathrm{e}^{j126.1^\circ}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Intenzita magnetického pole v místě z=3m, fázorový tvar:

$$\mathbf{H}_{\mathrm{y}}(\mathrm{z}) = \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{x}}(z)}{\mathbf{Z}} = \frac{0.184}{201.45}\mathrm{e}^{j126.1^\circ}\cdot\mathrm{e}^{j15.47^\circ} = 913.4\cdot 10^{-6}\cdot\mathrm{e}^{j141.6^\circ}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

Intenzita elektrického pole v místě z=3m a čase t=30ns, časový tvar:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{x}}(z,t) = 100\,\mathrm{e}^{-2.1\cdot 3}\sin(2\pi\cdot 100\cdot 10^{6}\cdot 30\cdot 10^{-9} - 7.6\cdot 3 + 25^\circ) = 0.184\sin(41.21) = -0.067\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Intenzita magnetického pole v místě z=3m a čase t=30ns, časový tvar:

$$\mathrm{H}_{\mathrm{y}}(z,t) = 0.496\,\mathrm{e}^{-2.1\cdot 3}\sin(2\pi\cdot 100\cdot 10^{6}\cdot 30\cdot 10^{-9} - 7.6\cdot 3 + 40.47^\circ) =$$

$$= 913.4\cdot 10^{-6}\sin(40.94) = -93.47\cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

{Př. NES/16} Rovinná harmonická elektromagnetická vlna, číselný příklad

Ve vzdálenosti **z=30 m** od vysílače základnové stanice (**f=900 MHz**) byla naměřena amplituda intenzity elektrického pole **E$_{m}$=50 V/m**. Předpokládejme, že v této vzdálenosti je již vyzařovaná elektromagnetická vlna rovinná. Je v tomto místě překročena hygienická norma pro expozici obyvatelstva **S$_{stř}$=4.5 W/m^{2}** ? Měření probíhalo ve volném prostoru.

Navazuje na
NES-c Výkon přenášený elektromagnetickou vlnou, Poyntingův vektor
{Př. NES/13} Střední hodnota Poyntingova vektoru, bilance výkonu

V tomto případě je výpočet střední hustoty výkonu velmi jednoduchý. V dané vzdálenosti známe amplitudu intenzity elektrického pole E$_{m}$, amplitudu intenzity magnetického pole H$_{m}$ můžeme snadno získat přes impedanci volného prostoru Z$_{0}$=120π:

$$H_m = \frac{E_m}{120\pi} = \frac{50}{120\pi} = 132.6\frac{\mu\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

Pak (prostředí je bezeztrátové – jedná se o volný prostor s čistě reálnou impedancí Z$_{0}$=120π):

$$S_{stř} = \frac{1}{2}E_m H_m = \frac{E_m^2}{2Z_0} = \frac{50^2}{2\cdot 120\pi} = 3.32\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

Hygienická norma 4.5 W/m^{2} není překročena.