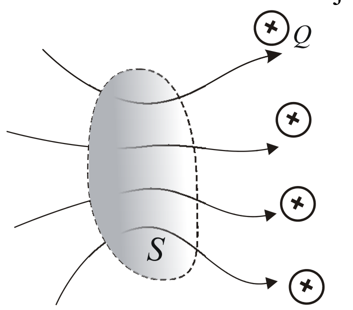
III Stacionární proudové pole

V případě elektrostatického pole jsme hovořili o tělesech nabitých elektrickým nábojem. Tělesa byla nabita tím, že jsme přidali nebo odebrali nabité částice jednoho znaménka. Po nabití se přeskupily během krátkého okamžiku elektrické náboje tak, že nastal ustálený stav. V ustáleném stavu se již částice nepohybují, nepůsobí na ně uvnitř vodiče žádné síly, intenzita elektrického pole uvnitř vodičů je tedy nulová. Vložený kladný nebo záporný náboj se usadí na povrchu vodiče, kde na něj působí pouze síla kolmá k povrchu tělesa. Vektor intenzita elektrického pole vystupuje kolmo z vodiče.
Obdobná situace nastane po vložení tělesa do vnějšího elektrického pole. I zde dojde k pohybu částic pouze do okamžiku, než bude dosaženo ustáleného stavu s nulovou intenzitou elektrického pole uvnitř vodiče. Pohyb nabitých částic označujeme jako **elektrický proud**. Aby mohl vzniknout trvalý elektrický proud, musíme dodávat pomocí vnějšího zdroje, kterým může být například elektrický článek nebo indukované napětí, elektrickou energii tak, abychom dosáhli v každém okamžiku nenulové intenzitu elektrického pole a tedy i nenulového potenciálového spádu ve vodiči.

PR-a Stacionární proudové pole -základní vztahy

V souvislosti s ustáleným proudem nabitých částic hovoříme o **ustáleném elektrickém proudu**. Takovým proudem bude zcela jistě proud stejnosměrný. I časově proměnné proudy s malou časovou změnou však můžeme z hlediska jejich účinků posuzovat podobně jako proudy stejnosměrné.



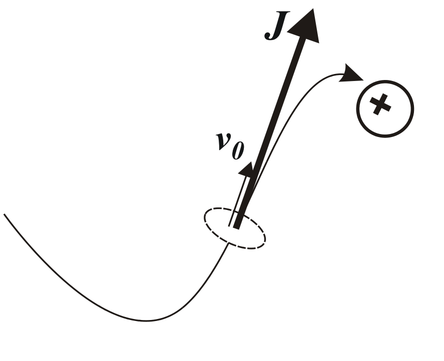
(Obr. PR-1) Elektrický proud

Definice elektrického proudu

Elektrický proud protékající určitou plochou je definován jako celkový náboj nabitých částic, který touto plochou projde za jednotku času. Protože se však může velikost procházejícího náboje v závislosti na čase měnit, je okamžitá hodnota proudu v určitém časovém okamžiku definována pomocí limitního vztahu

$$I = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

Podle historických zvyklostí se za **kladný smysl proudu** považuje **tok kladně nabitých částic**, ve skutečnosti je elektrický proud ve vodičích dán tokem záporných elektronů. Z hlediska výsledných účinků elektrického proudu je to však ekvivalentní. Kladný náboj, který přejde na jednu stranu uvažované plochy, je ekvivalentní se záporným nábojem, který přejde na druhou stranu.



(Obr. PR-2) Proudová hustota

Proudová hustota

Proud byl definován jako náboj, který projde určitou **plochou** za jednotku času, tento náboj však nemusí být ve všech místech uvažované plochy stejně veliký a navíc nemusí náboje obecně procházet ve směru kolmém na plochu. V extrémním případě by mohly procházet ve směru rovnoběžném s plochou a proud by byl nulový. Z tohoto důvodu zavádíme veličinu, která se nazývá **proudová hustota.** Je to vektorová veličina**,** která je definována jako proud vztažený na jednotku plochy orientováné kolmo ke směru pohybujících se nábojů

$$\boldsymbol{J} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \cdot \boldsymbol{v_0}$$

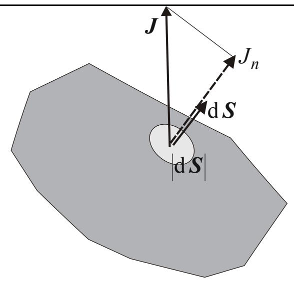
kde $\mathbf{v_0}$ je jednotkový vektor ve směru pohybu nabitých částic.
Pomocí proudové hustoty je potom možné vyjádřit standardním způsobem proud protékající zcela libovolně natočenou plochou. Je k tomu opět možné využít vlastností skalárního součinu.

Proud vyjádřený pomocí proudové hustoty

Proud, který projde elementární plochou o velikost dS, potom bude

$$\mathrm{d}I = \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Vliv skutečného natočení elementární plochy vůči směru pohybujících se částic je ve vztahu zohledněn skalárním součinem, ve kterém je plocha reprezentována obvyklým způsobem pomocí vektoru d***S***, který má velikost dS a je orientován ve směru kolmém na plochu.



(Obr. PR-3) Elektrický proud jako tok vektoru proudové hustoty

Celkový proud plochou je možno získat integrací proudové hustoty po dané ploše.

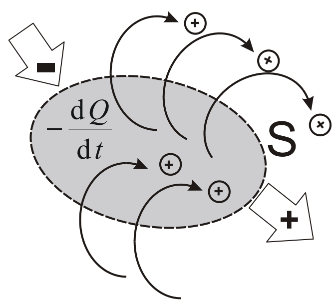
$$I = \iint_S \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

O elektrickém proudu by se tedy dalo hovořit s ohledem na užitou terminologii jako o toku vektoru proudové hustoty.

Rovnice kontinuity elektrického proudu

Pro tok vektoru proudové hustoty uzavřenou plochou (**elektrický proud)** platí podle dohody stejně zvolené smysly jako pro toky jiných vektorových veličin.

Tok vtékající do uzavřené plochy má znaménko mínus, vytékající znaménko plus. Integrál proudové hustoty po uzavřené ploše potom značí celkovou bilanci vtékajícího a vytékajícího náboje za jednotku času. Přiteče-li například jiné množství náboje, než odteče, musí se to projevit změnou množství náboje uzavřeného obalovou plochou v určitém objemu. Bude-li integrál vektoru proudové hustoty kladný, znamená to s ohledem na zvolené smysly, že větší množství náboje za jednotku času odteklo, než přiteklo. To se projeví časovou změnou náboje v daném objemu, v tomto případě zmenšením náboje. Uvedené skutečnosti jsou zformulovány do **rovnice kontinuity proudu**



(Obr. PR-4) Rovnice kontinuity elektrického proudu

$$\iint_S \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

Rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru představuje bilanci elektrického náboje v elementárním objemu

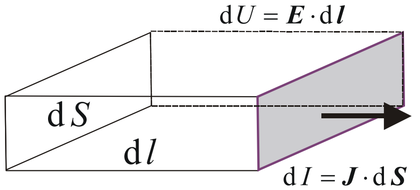
$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{J} = -\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$$

V této rovnici se vyskytuje objemová hustota náboje a funkce divergence aplikovaná standardním způsobem na vektor proudové hustoty. Ve stacionárním proudovém poli (ustálené proudy) se náboje nikde nehromadí, ani se nikde neztrácejí, kolik částic do uzavřené plochy vteče, tolik i vyteče. Platí **rovnice kontinuity stacionárního proudu**

$$\oiint_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \qquad\qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{J} = 0$$

Tyto rovnice prakticky popisují I. Kirchhofův zákon v elektrických obvodech. V integrálním tvaru by platilo:

$$\oiint_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 = J_1S_1 + J_2S_2 + \cdots + J_nS_n = I_1 + I_1 + I_1 + \cdots I_n = \sum I = 0$$



(Obr. PR-5) Ztráty v jednotce objemu

Ohmův zákon - výpočet elektrického odporu vodiče

Ohmův zákon v diferenciálním tvaru definuje v každém bodě závislost proudové hustoty a intenzity elektrického pole. Konstanta úměrnosti se nazývá **měrná vodivost σ**.

$$\boldsymbol{J} = \sigma\cdot\boldsymbol{E}$$

Když si ve vodiči vytkneme elementární objem **d*V***, ve kterém prochází proudová hustota rovnoběžně s podélnými hranami (proudová trubice), a do výpočtu zavedeme integrální veličiny, kterými je napětí a proud, dostáváme pro proud tekoucí čelní plochou d***S*** objemu **d*V***

$$\mathrm{d}I = \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = J\cdot\mathrm{d}S$$

Napětí rozložené po délce tohoto objemu:

$$\mathrm{d}U = \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = E\cdot\mathrm{d}l$$

Dáme-li napětí a proud do podílu, můžeme definovat **elektrický odpor** úseku proudové trubice o délce dl a průřezu dS

$$\mathrm{d}R = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}I} = \frac{E \cdot \mathrm{d}l}{J \cdot \mathrm{d}S} = \frac{E \cdot \mathrm{d}l}{\sigma E \cdot \mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}l}{\sigma \cdot \mathrm{d}S}$$

Tento vztah lze aplikovat nejen na část proudové trubice, ale i na celý vodič s určitými rozměry. Musí však platit podmínka, že linie proudové hustoty všude protínají průřezovou plochu vodiče kolmo, potom lze napsat

$$R = \int_l \frac{\mathrm{d}l}{\sigma \cdot S}$$

Pokud by byl průřez všude po délce vodiče konstantní, zjednoduší se vztah navíc na

$$R = \frac{l}{\sigma \cdot S}$$

Tento jednoduchý způsob výpočtu **elektrického odporu** nám však umožní počítat elektrický odpor pouze v těch nejjednodušších případech, ve většině složitějších technických úloh se neobejdeme bez numerických výpočtů, které mohou být založeny například na řešení rovnice pro potenciál.

Jouleův zákon

Jouleův zákon se zabývá částí energie pohybujících se nabitých částic, která se v objemu tělesa přeměňuje na teplo. V jednotkovém objemu je měrná hustota ztrátového výkonu dána vztahem

$$p = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}$$

Pomocí Ohmova zákona lze Jouleův zákon přeformulovat ještě do následujících tvarů

$$\boldsymbol{J} = \sigma \cdot \boldsymbol{E}$$

$$p = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} = \sigma.\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E} = \sigma \cdot \boldsymbol{E}^2 = \frac{\boldsymbol{J}^2}{\sigma}$$

Celkovou bilanci výkonu, který se v určitém objemu přeměňuje na teplo dostaneme integrací přes objem celého tělesa:

$$P = \iiint_V p.\mathrm{d}V$$

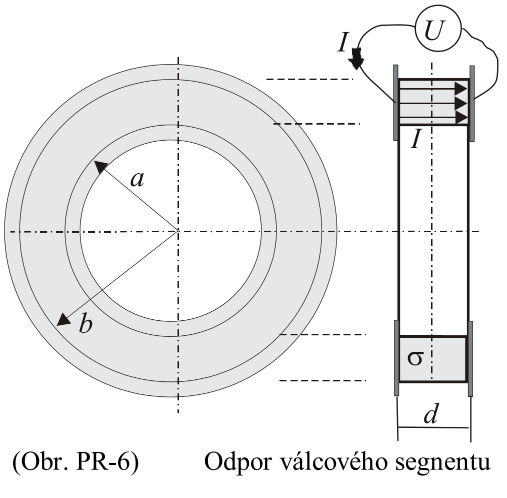
V případě, že je v celém tělese konstantní proudová hustota a těleso je homogenní, lze integraci nahradit prostým algebraickým součinem hustoty ztrát a velikosti objemu. Pro celkové ztráty dostáváme jednoduchý vztah:

$$P = \iiint_V p.\mathrm{d}V = \frac{\boldsymbol{J}^2}{\sigma} S.l = \frac{\boldsymbol{J}^2}{\sigma} \frac{S^2 l}{S} = I^2 \cdot \frac{l}{\sigma \cdot S} = R \cdot I^2$$

PR-b Výpočet odporů a vodivostí, analogie elektrostatického a proudového pole

{Př. PR/1} Odpor válcového segmentu ve směru kolmém na čelní válcové plochy

Jak velký je odpor válcového segmentu s rozměry podle obrázku (Obr. PR-6), prochází-li elektrický proud kolmo na čelní plochy vodiče?



(Obr. PR-6) Odpor válcového segnentu

Linie proudové hustoty procházejí v tomto případě od jedné elektrody ke druhé kolmo na průřez segmentu, který je všude stejný.

Pro odpor platí jednoduchý vztah

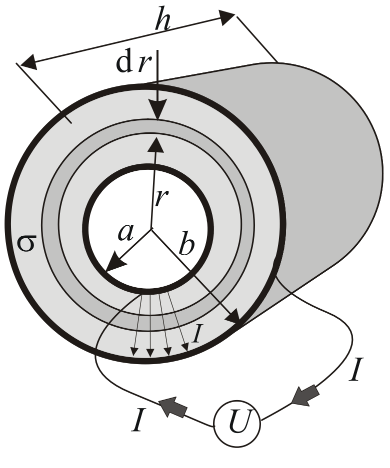
$$R = \frac{l}{\sigma \cdot S} = \frac{d}{\sigma \pi (b^2 - a^2)}$$

Proud se rozloží rovnoměrně po průřezu, proudová hustota bude všude stejná

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi (b^2 - a^2)}$$

{Př. PR/2} Odpor (vodivost) mezi koaxiálními válcovými elektrodami v radiálním směru

Jak velký odpor je mezi koaxiálními válcovými elektrodami s rozměry podle obrázku (Obr. PR-7)?



(Obr. PR-7) Odpor mezi koaxiálními válcovými elektrodami

Je-li mezi válcovými elektrodami o poloměru ***a*** a ***b*** materiál o měrné vodivosti **σ**, začne mezi nimi po přiložení napětí procházet proud ***I***. S ohledem na definici proudové hustoty

$$I = \iint_S \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

bude pro proudovou hustotu v určitém místě na poloměru r platit

$$J(r) = \frac{I}{2\pi\, r\, h}$$

Podle Ohmova zákona v diferenciálním tvaru bude pro intenzitu elektrického pole v místě na poloměru ***r*** platit

$$E(r) = \frac{J(r)}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\,\sigma\, h}\frac{1}{r}$$

Integrací intenzity elektrického pole mezi elektrodami dostaneme napětí

$$U = \int_a^b E(r)\,\mathrm{d}r = \frac{I}{2\pi\,\sigma\, h}\int_a^b \frac{1}{r}\,\mathrm{d}r = \frac{I}{2\pi\,\sigma\, h}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Konstanta udávající vztah mezi proudem a napětím se nazývá vodivost (Ohmův zákon v integrálním tvaru)

$$I = G \cdot U$$

Z předchozí rovnice plyne vztah pro vodivost mezi válcovými elektrodami

$$I = \frac{2\pi\,\sigma\, h}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}U$$

Vodivost a odpor mezi válcovými elektrodami je tedy

$$G = \frac{2\pi\,\sigma\, h}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \qquad R = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi\,\sigma\, h}$$

U koaxiálního kabelu se zavádí veličina odpovídající vodivosti na jednotku délky v příčném směru a nazývá se **svod**

$$G/l = \frac{2\pi\,\sigma}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Na celou úlohu je možno pohlédnout z druhé strany a vše chápat jako sériově řazené odpory jednotlivých slupek o poloměru ***r*** a tloušťce **d*r***: Odpor jedné slupky bude

$$\mathrm{d}R = \frac{l}{\sigma\,\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}r}{\sigma\, 2\pi\, r\, h}$$

Celkový odpor v příčném(radiálním) směru tedy bude)

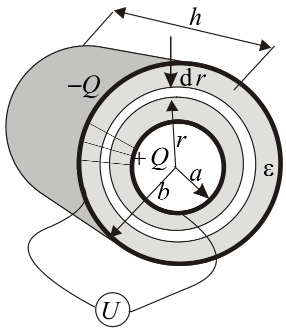
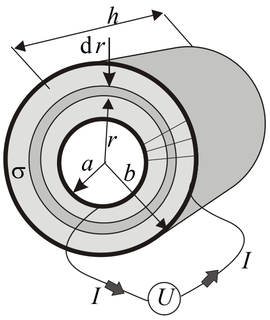
$$R = \int \mathrm{d}R = \frac{\ln\frac{b}{a}}{2\pi\,\sigma\, h}$$

Poznámka:
Svod, který se uvažuje při výpočtech vedení, není přímo hodnota daná ohmickým odporem dielektrika. Ohmický odpor je u každého reálného dielektrika obrovský. Při výpočtech vedení je to určitá ekvivalentní hodnota, která odpovídá dielektrickým ztrátám ve vedení a je závislá na kmitočtu.

{Př. PR/3} Analogie elektrostatického a stacionárního proudového pole

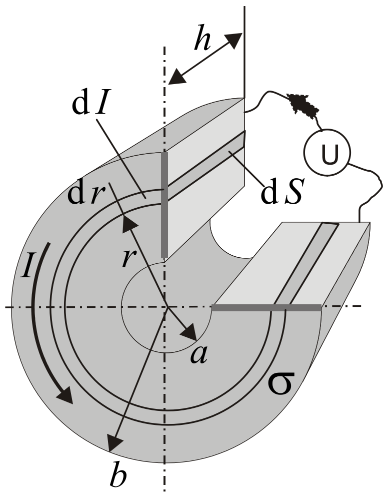
Na příkladě výpočtu elektrostatického pole a stacionárního proudového pole mezi dvěma válcovými elektrodami, mezi které je přivedeno napětí $\boldsymbol{U}$, ukážeme analogii těchto polí

Analogie veličin elektrostatického a stacionárního proudového pole vyplývá ze stejné povahy a vzájemné podobnosti těchto polí.

Elektrostatické pole		Stacionární proudové pole	
			
Tok vektoru elektrické indukce - indukční tok	$\psi = \iint_S \boldsymbol{D}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$	Tok vektoru proudové hustoty - elektrický proud	$I = \iint_S \boldsymbol{J}.\mathrm{d}\boldsymbol{S}$
Integrace po uzavřené ploše obklopující náboj	$\oiint_S \boldsymbol{D}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$	Princip kontinuity proudu ve stacionárním poli	$\oiint_S \boldsymbol{J}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$
		Integrace po uzavřené ploše kolem elektrody, ze které pomyslně proud pouze vychází	$\oiint_S \boldsymbol{J}.\mathrm{d}\boldsymbol{S} = I$
Elektrická indukce	$D(r) = \dfrac{Q}{2\cdot\pi\cdot r\cdot l}$	Proudová hustota	$J(r) = \dfrac{I}{2\cdot\pi\cdot r\cdot l}$
Vztah mezi indukcí a intenzitou pole	$\boldsymbol{D} = \varepsilon\cdot\boldsymbol{E}$	Vztah mezi proudovou hustotou a intenzitou pole	$\boldsymbol{J} = \sigma\cdot\boldsymbol{E}$
Vztah pro intenzitu elektrického pole	$E(r) = \dfrac{D(r)}{\varepsilon} = \dfrac{Q}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot l}\cdot\dfrac{1}{r}$	Vztah pro intenzitu elektrického pole	$E(r) = \dfrac{J(r)}{\sigma} = \dfrac{I}{2\cdot\pi\cdot\sigma\cdot l}\cdot\dfrac{1}{r}$
Napětí mezi elektrodami zpětně vypočtené z intenzity pole	$U = \int E(r)\cdot\mathrm{d}r = \dfrac{Q}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot l}\cdot\ln\dfrac{b}{a}$	Napětí mezi elektrodami zpětně vypočtené z intenzity pole	$U = \int E(r)\cdot\mathrm{d}r = \dfrac{I}{2\cdot\pi\cdot\sigma\cdot l}\cdot\ln\dfrac{b}{a}$
Vztah mezi nábojem a napětím - kapacita	$Q = \dfrac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot l}{\ln\dfrac{b}{a}}U$	Vztah mezi proudem a napětím - vodivost	$I = \dfrac{2\cdot\pi\cdot\sigma\cdot l}{\ln\dfrac{b}{a}}U$
Definice kapacity	$Q = C\cdot U$	Definice vodivosti	$I = G\cdot U$
Kapacita	$C = \dfrac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot l}{\ln\dfrac{b}{a}}$	Vodivost	$G = \dfrac{2\cdot\pi\cdot\sigma\cdot l}{\ln\dfrac{b}{a}}$
Kapacita na jednotku délky	$C/l = \dfrac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}{\ln\dfrac{b}{a}}$	Vodivost na jednotku délka (svod)	$G/l = \dfrac{2\cdot\pi\cdot\sigma}{\ln\dfrac{b}{a}}$
Permitivita	ε	Měrná vodivost	σ

{Př. PR/4} Odpor (vodivost) válcového segmentu v podélném směru

Jak velký odpor má válcový segment s rozměry podle obrázku (Obr. PR-8)?



(Obr. PR-8) Vodivý válcový segment

Přivedeme-li napětí ***U*** na čelní plochy válcového segmentu podle obrázku, začne v tečném směru protékat proud ***I***. Pro výpočet velikosti protékajícího proudu respektive odporu je možné segment rozdělit na elementární vrstvy. Jedna taková je vyznačena na obrázku, je na poloměru ***r*** a má tloušťku **d*r***. Proudová hustota i intenzita elektrického pole bude mít pouze tečnou složku. Pro intenzitu elektrického pole na určitém poloměru podél každé dílčí slupky musí platit:

$$U = \int E\,\mathrm{d}l = \int_0^{\alpha} E(r) r\,\mathrm{d}\varphi = E(r)\, r\, \alpha$$

Z toho intenzita elektrického pole na libovolném poloměru

$$E(r) = \frac{U}{\alpha\, r}$$

Je-li v místě elementární slupky intenzita elektrického pole E(r), je v tomto místě také proudová hustota o velikosti

$$J(r) = \sigma\, E(r) = \sigma \frac{U}{\alpha\, r}$$

Elementární vrstvou segmentu bude protékat část proudu

$$\mathrm{d}I = J(r)\,\mathrm{d}S = J(r) h\,\mathrm{d}r = \frac{\sigma h U}{\alpha\, r}\mathrm{d}r$$

Celým válcovým segmentem potom protéká proud

$$I = \iint_S J\,\mathrm{d}S = \int_a^b J(r) h\,\mathrm{d}r = \frac{\sigma h U}{\alpha}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\sigma h}{\alpha}\ln\frac{b}{a}U$$

Velikost odporu válcového segmentu je potom

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\alpha}{\sigma h \cdot \ln\dfrac{b}{a}}$$

Na celou úlohu je možno ještě pohlednout z druhé strany a vše chápat jako paralelně spojené odpory jednotlivých elementárních vrstev. Vodivost takové vrstvy bude

$$\mathrm{d}G = \frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{l} = \frac{\sigma h\,\mathrm{d}r}{\alpha\, r}$$

celková vodivost bude

$$G = \int \mathrm{d}G = \frac{\sigma h}{\alpha}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\sigma h}{\alpha}\ln\frac{b}{a}$$

Odpor válcového segmentu tedy bude

$$R = \frac{1}{G} = \frac{\alpha}{\sigma h \cdot \ln\dfrac{b}{a}}$$

{Př. PR/5} Svod koaxiálního kabelu

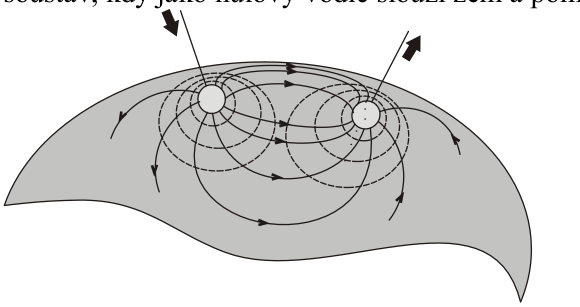
Koaxiální kabel délky **h=50 m** má dielektrikum s měrnou vodivostí **σ=0.0001 S/m** a je připojen na napětí **U=100 V**. Jak velký svodový proud **I** poteče dielektrikem? Rozměry kabelu **a=0.2mm**, **b=5mm**.

Navazuje na
{Př. PR/2} Odpor (vodivost) mezi koaxiálními válcovými elektrodami v radiálním směru

$$I = \frac{2\pi \cdot \sigma \cdot h \cdot U}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi \cdot 0.0001 \cdot 50 \cdot 100}{\ln\left(\frac{5}{0.2}\right)} = 0{,}976\ A$$

PR-c Elektrody v zemi - uzemnění

Umístíme-li dvě elektrody do země a přiložíme mezi ně napětí, bude se zem chovat jako určitý speciální druh vodiče, zemí poteče proud od jedné elektrody ke druhé.
Velikosti odporů mezi takovými dvěma elektrodami nedosahují tak velkých hodnot, jak by se na první pohled mohlo zdát. Země je sice vodič s relativně špatnou vodivostí, řádově milionkrát menší než běžné vodiče používané v elektrotechnice, je to však vodič nesmírně rozlehlý s obrovským průřezem.
Země jako vodič se obvykle nevyužívá k vedení pracovního proudu, je to však důležitý prvek ochrany proti úrazu elektrickým proudem a využívá se ho například i při provozu třífázových elektrických soustav, kdy jako nulový vodič slouží zem a pomocí zemního proudu se indikují závady soustavy.



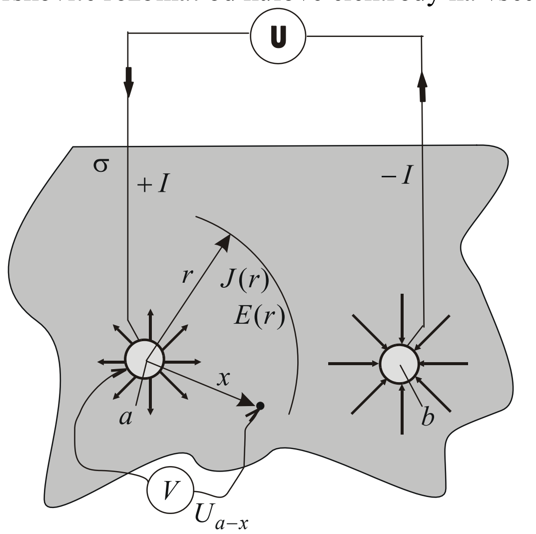
(Obr. PR-9) Elektrody umístěné v zemi - uzemnění

Prochází-li proud vodičem, který klade průchodu proudu určitý odpor, vznikají na vodiči úbytky napětí. Podobně i při průchodu proudu zemí můžeme mezi různými body naměřit rozdíly napětí, které jsou s tímto úbytkem napětí srovnatelné. Velikost proudu, který může procházet uzemňovací elektrodou do země, je limitována takzvaným krokovým napětím, což je maximální dovolené napětí, které se smí objevit na povrchu země mezi dvěma body vzdálenými o standardně definovanou délku kroku.
Velikost krokového napětí je definována příslušnými normami, obvykle se jedná o vzdálenost 1 m a pro informaci se hodnoty napětí pohybují kolem 90 V pro střídavý proud a 125 V pro stejnosměrný proud. Tato velikost je určena na základě bezpečných hodnot, které zaručí, že nedojde k úrazu elektrickým proudem osoby, která by se pohybovala po povrchu země v blízkosti uzemňovací elektrody.

{Př. PR/6} Přechodový odpor kulové elektrody umístěné relativně hluboko v zemi

Jaký je odpor mezi kulovými elektrodami podle obrázku (Obr. PR-10), které jsou umístěné hodně hluboko v zemi a daleko od sebe?

Umístíme-li v dostatečné hloubce a dostatečné vzdálenosti od sebe do země dvě kulové elektrody a připojíme-li mezi ně napětí **U**, začne mezi elektrodami protékat elektrický proud **I**. V tomto případě můžeme předpokládat, že kolem každé elektrody vznikne zcela symetrické elektrické pole, které nebude ovlivňováno přítomností druhé elektrody ani povrchem země. Proudové linie se budou symetricky paprskovitě rozbíhat od kulové elektrody na všechny strany.



(Obr. PR-10) Uzemňovací elektrody hluboko v zemi a daleko od sebe

Proudová hustota se rozloží na povrchu elektrod rovnoměrně a bude mít velikost

$$J(r=a) = \frac{I}{4\pi a^2}$$

Na povrchu elektrod bude intenzita elektrického pole

$$E(r=a) = \frac{J(r=a)}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{a^2}$$

Obklopíme-li kulovou elektrodu v libovolném místě o vzdálenosti ***r*** sférickou obalovou plochou, bude v tomto místě na ploše proudová hustota

$$J(r) = \frac{I}{4\pi r^2}$$

Intenzita elektrického pole v tomto místě bude

$$E(r) = \frac{J(r)}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{r^2}$$

Mezi povrchem elektrody a místem na poloměru x, které si zvolíme, bude napětí, které lze chápat jako již zmiňovaný pomyslný úbytek vzniklý průchodem proudu

$$U_{a-x} = \int_a^x E(r)\,\mathrm{d}r = \frac{I}{4\pi\sigma}\int_a^x \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)$$

Napětí mezi elektrodou a bodem ležícím hodně daleko (v nekonečnu) se nazývá **přechodové napětí**. Toto napětí lze chápat jako celkový pomyslný úbytek napětí způsobený průchodem proudu vodivým prostředím kolem jedné elektrody

$$U_p = U_{a-\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right) = \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{a}$$

Tomuto napětí odpovídá **odpor**, který se nazývá **přechodový**

$$R_{p1} = \frac{U_p}{I} = \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{a}$$

Celkový odpor mezi dvěma elektrodami je dán součtem přechodového odporu první i druhé elektrody

$$R_p = R_{p1} + R_{p2} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

{Př. PR/7} Odpor mezi kulovými elektrodami, které jsou relativně blízko u sebe, ale hodně hluboko v zemi

Jaký je odpor mezi kulovými elektrodami, které jsou zakopané ve vzdálenosti od sebe **s** a jsou hodně hluboko v zemi jako na obrázku (Obr. PR-11)?

Navazuje na

{Př. PR/6} Přechodový odpor kulové elektrody umístěné relativně hluboko v zemi.

V tomto případě již není možné předpokládat jako v {Př. PR/6}, že by se proudové linie kolem každé z elektrod nerozdělily symetricky. Skutečný průběh je možné respektovat v každém místě superpozicí elektrického pole obou elektrod.

Umístíme-li v dostatečné hloubce v zemi dvě kulové elektrody a připojíme-li mezi ně napětí, začne mezi elektrodami protékat elektrický proud. V tomto případě není elektrické pole elektrod ovlivněno povrchem země. Pro intenzitu elektrického pole vybuzeného ve vzdálenosti ***r*** jednou z elektrod bude platit

$$E(r) = \frac{J(r)}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{r^2}$$

Podobně jako v elektrostatickém poli lze zavést potenciál

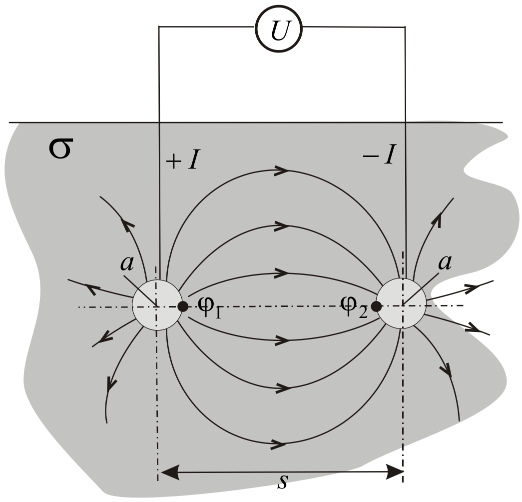
$$\varphi = -\int E(r)\,\mathrm{d}r + K = \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{r} + K$$

Potenciál na povrchu levé elektrody můžeme získat sečtením potenciálu obou elektrod a platí

$$\varphi_1 = \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{a} + K_1 + \frac{-I}{4\pi\sigma}\frac{1}{s} + K_2$$

Potenciál na povrchu pravé elektrody je

$$\varphi_2 = \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{s} + K_1 + \frac{-I}{4\pi\sigma}\frac{1}{a} + K_2$$



(Obr. PR-11) Přechodový odpor mezi elektrodami, které jsou relativně blízko u sebe

Pozn.: V tomto výpočtu je určitý rozpor. Počítáme totiž, jak se vzájemně ovlivní pole dvou blízkých elektrod, ale elektrické pole a potenciál jedné elektrody počítáme zcela stejně, jako by každá z elektrod existovala zcela samostatně a tvar jejich pole zůstal sférický. To však platí s dostatečnou přesností pouze za předpokladu, že vzdálenost mezi elektrodami ***s*** je podstatně větší, než poloměr elektrod ***a***. Stejný předpoklad platil i pro obdobné úlohy v elektrostatickém poli.

Napětí mezi elektrodami lze určit jako rozdíl potenciálů

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{2}{a} - \frac{2}{s}\right) = \frac{I}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{s}\right)$$

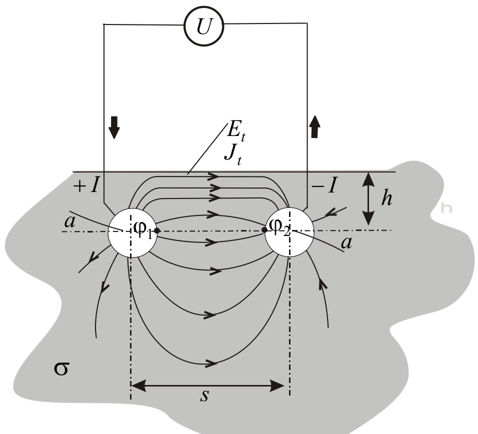
Z podílu napětí a proudu mezi elektrodami vyplyne velikost odporu

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{s}\right)$$

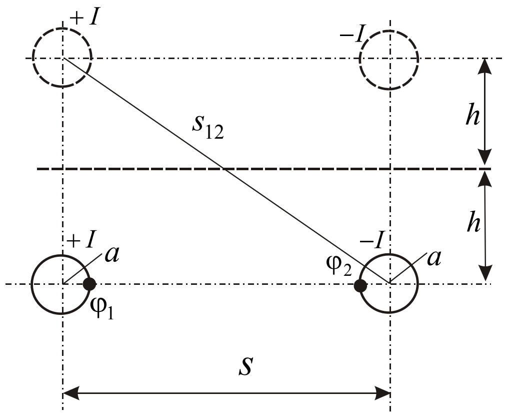
{Př. PR/8} Odpor mezi kulovými elektrodami v zemi s přihlédnutím k hloubce a vzdálenosti elektrod od sebe.

Jak se projeví vliv vzdálenosti uzemňovacích elektrod od sebe a současně vliv blízkého povrchu země na velikosti odporu mezi elektrodami podle obrázku (Obr. PR-12)?

Navazuje na
{Př. PR/6} Přechodový odpor kulové elektrody umístěné relativně hluboko v zemi
{Př. PR/7} Odpor mezi kulovými elektrodami, které jsou relativně blízko u sebe, ale hodně hluboko v zemi



(Obr. PR-12) Vliv země na přechodový odpor mezi elektrodami



(Obr. PR-13) Náhradní model pro výpočet přechodového odporu

Ve stacionárním proudovém poli je možné zavést potenciál stejně jako v elektrostatickém poli

$$\varphi = -\int E(r)\,\mathrm{d}r + K = \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{r} + K$$

Vliv roviny země je možno respektovat pomocí metody zrcadlení symetrickým umístěním elektrod se stejným smyslem proudu, do stejné vzdálenosti nad rovinu země. Pro výsledný potenciál na levé elektrodě platí

$$\varphi_1 = \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{a} + K_1 + \frac{-I}{4\pi\sigma}\frac{1}{s} + K_2 + \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{2h} + K_3 + \frac{-I}{4\pi\sigma}\frac{1}{s_{12}} + K_4$$

pro výsledný potenciál na pravé elektrodě platí

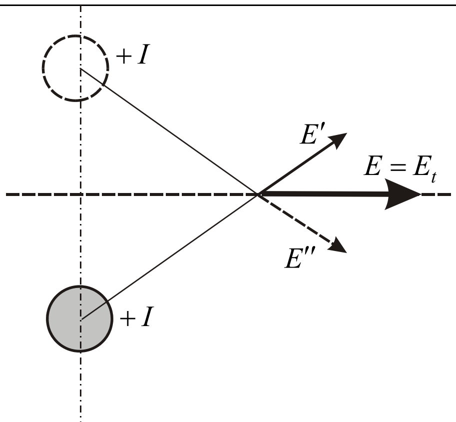
$$\varphi_2 = \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{s} + K_1 + \frac{-I}{4\pi\sigma}\frac{1}{a} + K_2 + \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{s_{12}} + K_3 + \frac{-I}{4\pi\sigma}\frac{1}{2h} + K_4$$

Napětí mezi elektrodami lze vypočítat jako rozdíl potenciálů

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{2}{a} - \frac{2}{s} + \frac{1}{h} - \frac{2}{s_{12}}\right)$$

Z podílu napětí a proudu lze vypočítat odpor mezi elektrodami

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{2}{a} - \frac{2}{s} + \frac{1}{h} - \frac{2}{s_{12}}\right)$$



(Obr. PR-14) Metoda zrcadlení ve stacionárním proudovém poli

Metoda zrcadlení je v případě stacionárního proudového pole aplikována poněkud odlišně než v elektrostatickém poli. Chceme-li v proudovém poli respektovat vliv roviny země na rozložení elektrického pole kulové elektrody, umístíme symetricky do stejné vzdálenosti elektrodu se stejným smyslem proudu. Výsledek potom bude souhlasit se skutečností, protože pole pod povrchem země má pouze tečnou složku.

V případě výpočtu elektrického pole nabité elektrody nad zemí umístíme symetricky náboj s opačným znaménkem. Výsledné pole potom bude souhlasit se skutečností, protože intenzita elektrického pole na vodivé rovině má pouze normálovou složku

{Př. PR/9} Přechodový odpor mezi kulovými elektrodami v zemi - číselný příklad

Jaký poloměr ***a*** musí minimálně mít kulové elektrody podle obrázku (Obr. PR-12), které jsou zakopané do země s měrnou vodivostí σ=0,01 S/m, ve vzdálenosti s=1m od sebe a do hloubky h=1m, pokud nemá odpor mezi elektrodami přesáhnout hodnotu R=1000 Ω?

Navazuje na
{Př. PR/8} Odpor mezi kulovými elektrodami v zemi s přihlédnutím k hloubce a vzdálenosti elektrod od sebe.

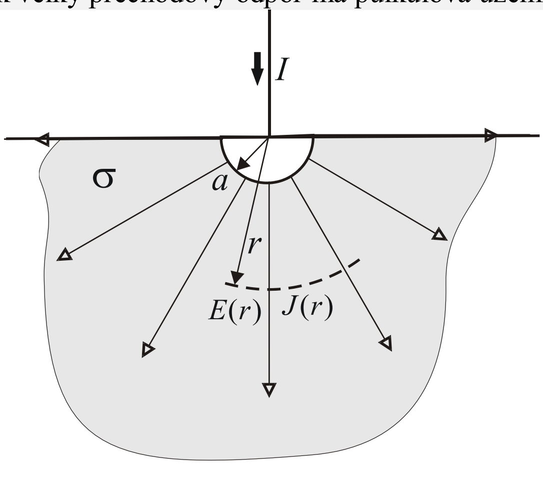
Pro odpor mezi elektrodami platí vztah

$$R = \frac{U}{I} \le 1000\ \Omega \le \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{2}{a} - \frac{2}{s} + \frac{1}{h} - \frac{2}{s_{12}}\right)$$

$$a \ge \frac{2}{4\pi\sigma R + \frac{2}{s} + \frac{2}{s_{12}} - \frac{1}{h}} \ge \frac{2}{4\pi \cdot 0{,}01 \cdot 1000 + \frac{2}{1} + \frac{2}{\sqrt{1^2 + (2\cdot 1)^2}} - \frac{1}{1}} \ge 15{,}7\,mm$$

{Př. PR/10} Přechodový odpor půlkulové uzemňovací elektrody

Jak velký přechodový odpor má půlkulová uzemňovací elektroda podle obrázku.



(Obr. PR-15) Půlkulová uzemňovací elektroda

Proudové linie vystupují opět symetricky na všechny strany do spodního poloprostoru.

Pro proudovou hustotu v zemi na libovolném poloměru vně elektrody bude platit

$$J(r) = \frac{I}{2\pi r^2}$$

Pro intenzitu elektrického pole

$$E(r) = \frac{J(r)}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma}\frac{1}{r^2}$$

Přechodové napětí

$$U_{a-x} = \int_a^\infty E(r)\,\mathrm{d}r = \frac{I}{2\pi\sigma}\left|-\frac{1}{r}\right|_a^\infty = \frac{I}{2\pi\sigma}\frac{1}{a}$$

Přechodový odpor bude

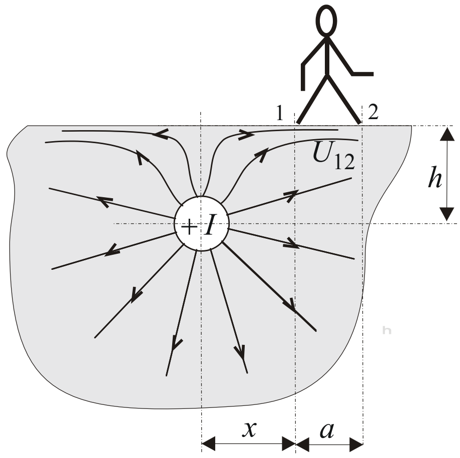
$$R_p = \frac{U_p}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma}\frac{1}{a}$$

Hodnota přechodového odporu půlkulové elektrody je podle očekávání právě dvojnásobná, než u kulové elektrody.

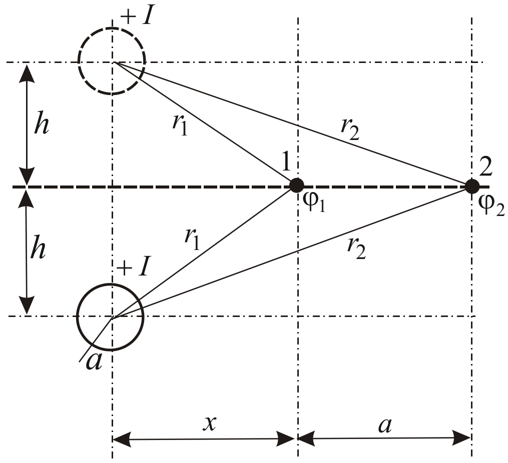
{Př. PR/11} Intenzita elektrického pole a krokové napětí na povrchu země v okolí uzemňovací elektrody

Jak velká intenzita elektrického pole a krokové napětí se může objevit na povrchu země ve vzdálenosti **x** od osy kulové uzemňovací elektrody?

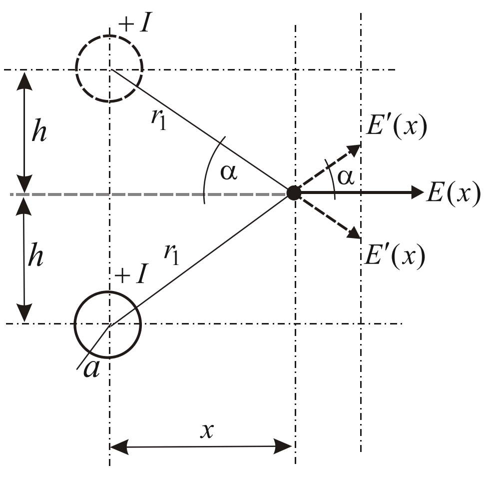
Napětí mezi dvěma body na povrchu země je možno vypočítat jako rozdíl potenciálů skutečné elektrody, ze které vychází proud +I a náhradní fiktivní elektrody umístěné symetricky na druhé straně dělící roviny, která respektuje vliv zakřivení siločar intenzity elektrického pole a tedy i linií proudové hustoty vlivem země. Na povrchu země musí mít tyto veličiny pouze tečnou složku.
Intenzitu elektrického pole na povrchu země lze vypočítat jako součet příslušné tečné složky intenzity elektrického pole skutečné a fiktivní elektrody.



(Obr. PR-16) Krokové napětí mezi dvěma body na povrchu země



(Obr. PR-17) Náhradní model pro výpočet potenciálu



(Obr. PR-18) Intenzita elektrického pole z náhradního modelu

Intenzita na povrchu země ve vzdálenosti x

$$E(x) = 2E'(x) = 2\frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{r_1^2}\cos(\alpha)$$

Po dosazení

$$E(x) = 2\frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{h^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} = \frac{I}{2\pi\sigma}\frac{x}{\left(h^2+x^2\right)^{3/2}}$$

Po vyšetření extrému funkce zjistíme, že největší intenzita elektrického pole je ve vzdálenostech

$$x_{\max} = \pm\frac{h}{\sqrt{2}}$$

Maximální intenzita elektrického pole má velikost

$$E_{\max} = \frac{I}{2\sqrt{2}\pi\sigma}\frac{h}{\left(h^2+\dfrac{h^2}{2}\right)^{3/2}}$$

Po dosazení a úpravě dostáváme pro maximální intenzitu pole vztah

$$E_{\max} = \frac{I}{2\sqrt{2}\pi\,\sigma}\frac{h}{\left(\frac{3h^2}{2}\right)^{3/2}} = \frac{I}{\sqrt{27}\pi\,\sigma\,h^2}$$

Napětí mezi dvěma body na povrchu země by bylo možné určit integrací intenzity elektrického pole, snadnější a přehlednější je počítat pomocí potenciálů:

Potenciál v bodě 1 na povrchu země

$$\varphi_1 = \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{r_1} + K_1 + \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{r_1} + K_2 = \frac{I}{2\pi\sigma}\frac{1}{\sqrt{h^2+x^2}} + K_1 + K_2$$

Potenciál v bodě 2 na povrchu země

$$\varphi_2 = \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{\sqrt{h^2+(x+a)^2}} + K_1 + \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{\sqrt{h^2+(x+a)^2}} + K_2 = \frac{I}{2\pi\sigma}\frac{1}{\sqrt{h^2+(x+a)^2}} + K_1 + K_2$$

Výsledné napětí (krokové napětí) mezi body 1 a 2 na povrchu země

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{I}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{h^2+(x+a)^2}}\right)$$

{Př. PR/12} Přechodový odpor půlkulové elektrody - číselný příklad

Vypočtěte přechodový odpor $\mathbf{R_p}$ půlkulové uzemňovací elektrody podle obrázku (Obr. PR-15) a stanovte krokové napětí $\mathbf{U_k}$ ve vzdálenosti **x=12 m** od středu elektrody.
Elektroda má poloměr **a=0.1 m** a je napájena proudem **I=150 A**. délku kroku uvažujte $\mathbf{l_k}$**=1 m**, vodivost země **σ=0.001 S/m**

Navazuje na
{Př. PR/10} Přechodový odpor půlkulové uzemňovací elektrody
{Př. PR/11} Intenzita elektrického pole a krokové napětí na povrchu země v okolí uzemňovací elektrody

Přechodový odpor je:

$$R_p = \frac{1}{2\pi\sigma a} = \frac{1}{2\pi\cdot 1\cdot 10^{-3}\cdot 0.1} = 1592\ \Omega$$

Krokové napětí vypočteme jako rozdíl potenciálů v bodech x a x+l_k

$$U_k = \varphi(x) - \varphi(x+l_k) = \frac{I}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+l_k}\right) = \frac{150}{2\pi\cdot 1\cdot 10^{-3}}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{13}\right) = 153\,V$$